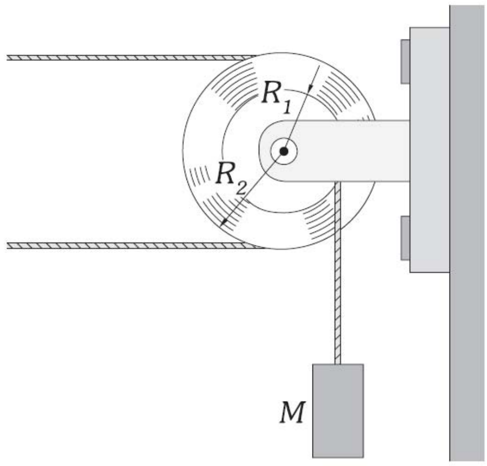
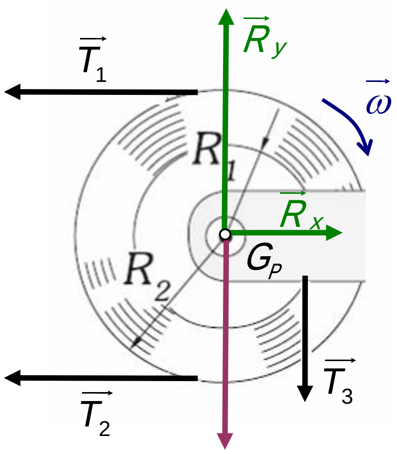
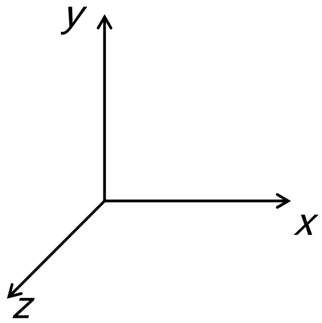
1. El sistema de poleas acopladas de la figura tiene un momento de inercia respecto de su eje de 100 kg·m^2. Los radios indicados son R_1 = 10 cm y R_2 = 20 cm, y el bloque tiene una masa M = 500 kg. Se pide:
   a) Dibuje los diagramas de sólido libre. (2p)
   b) Calcule la diferencia de tensiones entre ambas ramas de la correa cuando el bloque es subido a velocidad constante. (4p)
   c) Calcule la diferencia de tensiones cuando asciende con aceleración de 1 m/s^2. (4p)
   (Dato: g = 9,81 m/s^2)



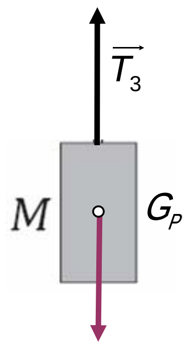
a) Diagramas de sólido libre:

Poleas





Bloque



$\vec{P}_P = M_P \vec{g}$

$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ = reacciones del soporte

$I_{G_P} = 100\,\text{kg·m}^2$

$R_1 = 0{,}10\,\text{m}; R_2 = 0{,}20\,\text{m}$

$\vec{P}_B = M\vec{g}$

$M = 500\,\text{kg}$

$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$

b) Diferencia de tensiones entre ambas ramas de la correa cuando el bloque es subido a velocidad constante

✶ Relaciones cinemáticas:

En general, la aceleración angular del disco interior de radio R_1 está relacionada con la aceleración tangencial de un punto del borde del mismo:

$$a_t = \alpha R_1 \Rightarrow \alpha = a_t / R_1 = a_B / R_1$$

Dado que la cuerda es inextensible, a_t debe coincidir con la aceleración de bajada del bloque, a_B. En este caso, $v=$ cte, $a_t = a_B = 0$.

✶ Ecuaciones generales de movimiento del sistema de poleas:

$$\sum \vec{F}^{P}_{ext} = M_p \vec{a}_{G_P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -T_1 - T_2 + R_x = 0 \\ -P_P - T_3 + R_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}^{ext}_{G_P} = I_{G_P} \vec{\alpha} \Rightarrow T_1 R_2 - T_2 R_2 - T_3 R_1 = I_{G_P} \alpha \Rightarrow \boxed{\Delta T_{12} = \frac{I_{G_P} \dfrac{a_B}{R_1} + T_3 R_1}{R_2}}$$

✶ Ecuaciones generales de movimiento del bloque:

$$\sum \vec{F}^{B}_{ext} = M \vec{a}_B \Rightarrow -P_B + T_3 = M a_B \Rightarrow \boxed{T_3 = M(a_B + g)}$$

✶ En el caso de v=cte, a_B=0:

$$\left.\begin{aligned} \Delta T_{12} &= \frac{T_3 R_1}{R_2} \\ T_3 &= Mg \end{aligned}\right\} \Delta T_{12} = \frac{MgR_1}{R_2} \Rightarrow \Delta T_{12} = \frac{500\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 0{,}10\ \text{m}}{0{,}20\ \text{m}}$$

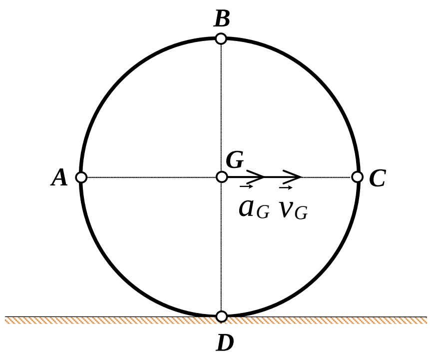
$$\boxed{\Delta T_{12} = 2452{,}5\ \text{N}}$$

c) Diferencia de tensiones cuando el bloque asciende con aceleración de 1 m/s².

$$T_3 = M(a_B + g) = 500\ \text{kg}\left(1\ \text{m/s}^2 \times 9{,}81\text{m/s}^2\right) = 5405\ \text{N}$$

$$\Delta T_{12} = \frac{I_{G_P} \dfrac{a_B}{R_1} + T_3 R_1}{R_2} = \frac{100 \times \dfrac{1}{0{,}10} + 5405 \times 0{,}10}{0{,}20} \Rightarrow \boxed{\Delta T_{12} = 7702{,}5\ \text{N}}$$

2. Una rueda de radio R = 0,50 m rueda sin deslizar por un plano horizontal y en un instante dado, su centro G tiene una velocidad de 1,50 m/s y una aceleración de 0,5 m/s^2 en la dirección indicada en la figura. Se pide:
   a) Indique donde está situado el centro instantáneo de rotación. (2p)
   b) Calcule la velocidad de los puntos A y B que se indican en la figura. (5p)
   c) Calcule la aceleración del punto D. (3p)



a) Centro instantáneo de rotación:

Al rodar sin deslizamiento, el punto D de contacto con el suelo tiene en cada instante velocidad nula, por ello D es el C.I.R. En cada instante, la rueda parece girar en torno a un eje perpendicular a ese punto de contacto, aunque D es un punto distinto de la rueda en cada momento.

b) La velocidad de los puntos *A* y *B*:

Tomando como referencia el C.I.R.:

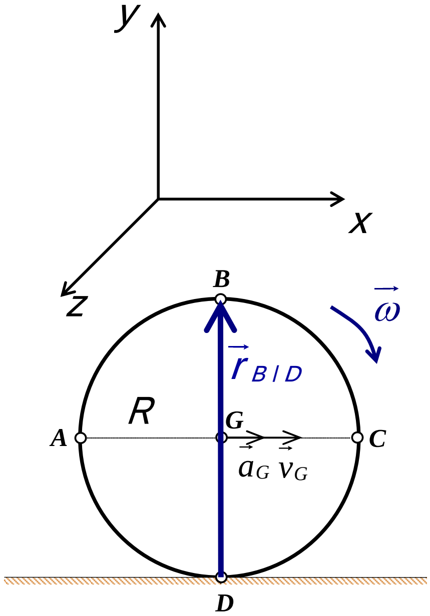
$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}_{P/CIR} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{P/D} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{DP}$$

siendo:

$$\omega = \frac{v_G}{R} = 3 \text{ rad/s} \quad \left(\vec{\omega} = -3\vec{k} \text{ rad/s}\right)$$

Para el punto B:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/D} = -3\vec{k}\times\left(2R\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = 3\vec{i} \text{ m/s}}$$



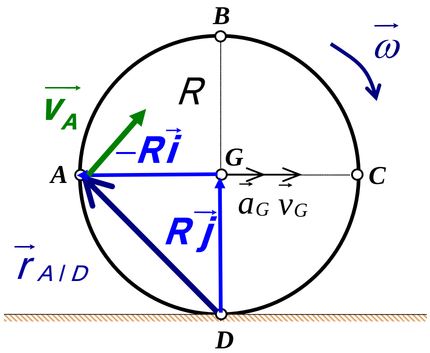
Para el punto *A*:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/D} = -3\vec{k} \times \left(-R\vec{i} + R\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \left(1{,}5\vec{i} + 1{,}5\vec{j}\right)\ \mathrm{m/s}}$$

c) La aceleración del punto *D*:

La aceleración de otro punto de la rueda en relación a la del centro de masa, que es conocida, es:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/G} - \omega^2 \vec{r}_{P/G}$$



Que ruede sin deslizar significa sólo que $v_D = 0$, pero no que lo sea su aceleración. La aceleración angular del disco es:

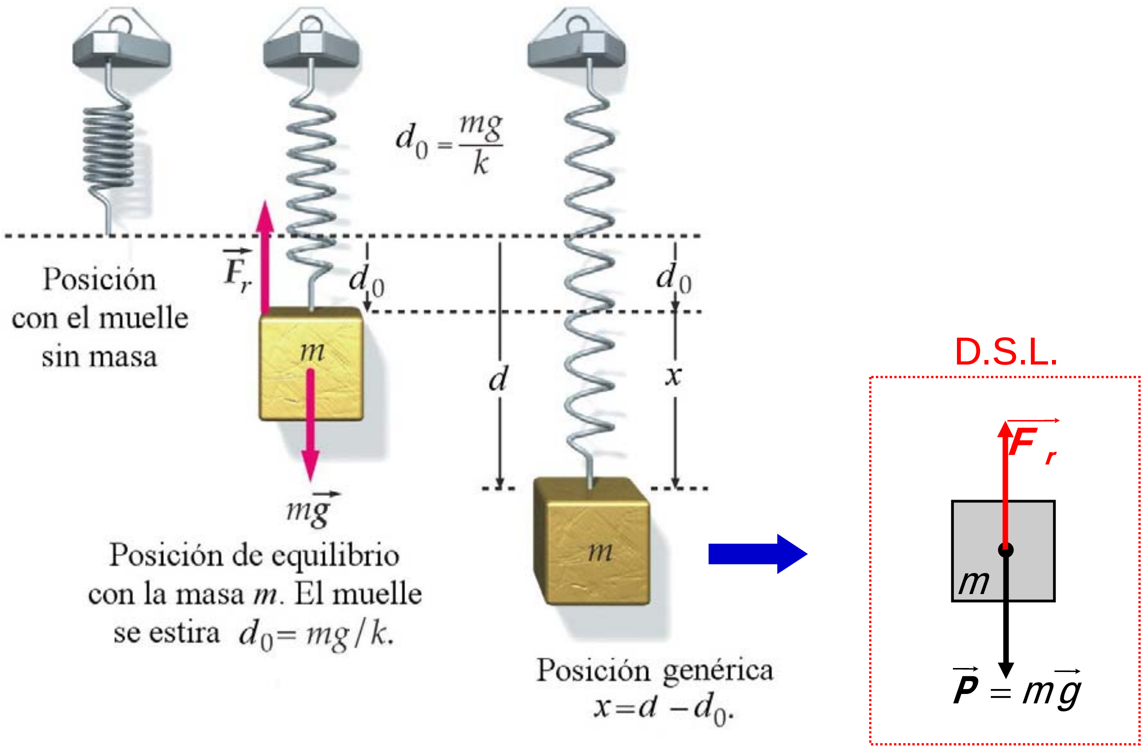
$$\alpha = \frac{a_G}{R} = 1\ \mathrm{rad/s^2} \quad \left(\vec{\alpha} = -\vec{k}\ \mathrm{rad/s^2}\right)$$

Entonces:

$$\vec{a}_D = 0{,}5\vec{i} + \left(-\vec{k} \times \left(-0{,}5\vec{j}\right)\right) - \left(9 \times \left(-0{,}5\vec{j}\right)\right) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_D = 4{,}5\vec{j}}$$

3. Se cuelga una masa de 0,1 kg de un resorte cuya constante elástica es $k = 20$ N/m. A continuación se desplaza la masa 10 cm hacia debajo de su posición de equilibrio. Finalmente se deja en libertad para que pueda oscilar libremente. Se pide:
   a) Dibuje el diagrama de sólido libre para una posición cualquiera, determine la fuerza resultante y la aceleración, demostrando que el movimiento resultante es un movimiento armónico simple. (3p)
   b) Calcule el período del movimiento y la fase inicial. (2p)
   c) Calcule la velocidad y la aceleración máximas.(2p)
   d) Determine la aceleración cuando la masa se encuentra 2 cm por encima de la posición de equilibrio.(1p)
   e) Calcule sus energías cinética y potencial elástica en ese punto.(2p)

a) Diagrama de sólido libre:



Deformación del muelle en la posición de equilibrio

En la posición de equilibrio se cumple $mg = kd_0$, luego d_0=4,91cm.

Posición Genérica: Fuerza resultante y la aceleración

$$\left.\begin{array}{l} F_r = -kd \\ P = mg \end{array}\right\} \sum F^{ext} = -F_r + P = ma$$

siendo: $d = d_0 + x = \frac{mg}{k} + x$

Entonces:

$$F_{total} = -kd + mg = -k(d_0 + x) + mg = -k\frac{mg}{k} - kx + mg \Rightarrow \boxed{F_{total} = -kx}$$

$$-kx = ma \Rightarrow \boxed{a = -\frac{k}{m}x}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Ec. del M.A.S.

La solución es del tipo: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

Frecuencia Angular: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b) Período del movimiento y fase inicial.

La amplitud del movimiento es el máximo desplazamiento del punto vibrante y la velocidad angular (pulsación) : ω=14,14 rad/s

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,444s}$$

Si se toma t=0 en x_0=+10cm (positivo hacia abajo) y v_0=0

$$\left.\begin{array}{r} 10 = A\cos\varphi \\ 0 = -A\omega sen\varphi \Rightarrow sen\varphi = 0° \text{ ó } 180° \end{array}\right\} \cos\varphi = +1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0°}$$

c) Velocidad y aceleración máximas.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \text{sen}(\omega t + \varphi) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \rightarrow v_{máx} = \pm A\omega \Rightarrow \boxed{v_{máx} = \pm 1,41 \text{ m/s}}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \rightarrow a_{máx} = \pm A\omega^2 \Rightarrow \boxed{a_{máx} = \pm 20,0 \text{ m/s}^2}$$

d) Determine la aceleración cuando la masa se encuentra 2 cm por encima de la posición de equilibrio

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow a(-2 \text{ cm}) = -200 \times (-0,02) \Rightarrow \boxed{a(-2 \text{ cm}) = +4,0 \text{ m/s}^2}$$

e) Energía cinética y potencial elástica.

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) \Rightarrow \boxed{E_C = 0,096 \text{ J}}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}k\left(d_0 - 0,02\right)^2 \Rightarrow \boxed{E_P = 8,47 \times 10^{-3} \text{ J}}$$