

Tema 4.- Transformaciones cuadráticas. Resolución de singularidades de curvas.

En \mathbf{P}_2 se consideran los puntos $P_0 = (1 : 0 : 0)$, $P_1 = (0 : 1 : 0)$, $P_2 = (0 : 0 : 1)$ y las rectas $L_i = (x_i = 0)$ para $i = 0, 1, 2$. Notemos $Z = \{P_0, P_1, P_2\}$ y $T = \cup_i L_i$.

Definición.- La aplicación $\gamma : \mathbf{P}_2 \setminus Z \rightarrow \mathbf{P}_2$ definida por $\gamma(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ se llama la transformación cuadrática de \mathbf{P}_2 (relativa a $\{P_0, P_1, P_2\}$).

Sea $U = \mathbf{P}_2 \setminus T$. La imagen de γ es $U \cup Z$. Además, la restricción de γ a U es biyectiva e involutiva. Ya que, sobre U , se tiene

$$\gamma(x_0 : x_1 : x_2) = \left(\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} \right).$$

Sea $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio homogéneo de grado d . Se denota por $F^\gamma = F^\gamma(x_0, x_1, x_2)$ al polinomio $F^\gamma = F(x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1)$. El polinomio F^γ es homogéneo de grado $2d$. A la curva definida por F^γ se le llama la transformada total de la curva definida por F (respecto de γ). $\mathcal{V}(F^\gamma)$ es la clausura de Zariski de $\gamma^{-1}(\mathcal{V}(F))$.

Lema.- Si $\text{mult}_{P_i}(F) = r_i$ entonces $x_i^{r_i}$ es la máxima potencia de x_i que divide a F^γ , para $i = 0, 1, 2$.

Se denota por F' el polinomio

$$F'(x_0, x_1, x_2) = \frac{F^\gamma}{x_0^{r_0} x_1^{r_1} x_2^{r_2}}.$$

A la curva definida por F' se le llama la transformada estricta de la curva definida por F (respecto de γ).

Lema.- Se tiene:

- El grado de F' es $2d - r_0 - r_1 - r_2$.
- $\text{mult}_{P_0}(F') = d - r_1 - r_2$ (y análogamente para P_1 y P_2).
- $(F')' = F$ y si F es irreducible también lo es F' .

En adelante nos restringiremos al caso F irreducible (aunque muchos de los resultados que enunciaremos son válidos para F reducida).

Si ninguna de las rectas excepcionales (i.e. ninguna de las L_i) es tangente a F en ninguno de los puntos fundamentales (i.e. los puntos P_j) diremos que F está en buena posición (respecto de $\{P_0, P_1, P_2\}$). Por ejemplo, ninguna de las cónicas del haz $F_\lambda = x_0^2 + \lambda x_1x_2$ está en buena posición. Observamos que $F_\lambda^\gamma = (x_1x_2)^2 + \lambda x_0x_2x_0x_1 = x_1x_2(x_1x_2 + \lambda x_0^2)$. Así, $(F_\lambda)'$ tampoco está en buena posición. Sin embargo se tiene:

Lema.- Si F está en buena posición también lo está F' .

Sea $C = \mathcal{V}(F)$, $C' = \mathcal{V}(F')$. Supongamos que $(C' \cap L_2) \setminus \{P_0, P_1\} = \{Q_1, \dots, Q_s\}$.

Lema.- Si, con las notaciones anteriores, C está en buena posición entonces:

- $\text{mult}_{Q_i}(C') \leq i_{Q_i}(C', L_2)$.
- $\sum_{i=1}^s i_{Q_i}(C', L_2) = r_2$. En particular, si $r_2 = 0$ (es decir, si $P_2 \notin C$), entonces $C' \cap L_2 \subset \{P_0, P_1\}$.

Mediante γ los puntos singulares de $C' \cap U$ corresponden a puntos singulares de $C \cap U$, con la misma multiplicidad. Además, puntos múltiples ordinarios se transforman en puntos múltiples ordinarios.

Definición.- Diremos que C (de grado d) está en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0) si:

- C está en buena posición (respecto de $\{P_0, P_1, P_2\}$).
- C corta a L_2 en d puntos distintos y no fundamentales.
- Aparte de en P_2 , C corta a L_0 (resp. L_1) en $d - r_2$ puntos distintos no fundamentales (donde r_2 sigue siendo $\text{mult}_{P_2}(C)$).

Lema.- Sea C irreducible, en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0) . Entonces los puntos P_0, P_1, P_2 son puntos múltiples ordinarios de C' de multiplicidades respectivas $d - r_2, d - r_2, d$.

Lema.- Se tiene $C' \cap L_0 \subset \{P_1, P_2\}$ y $C' \cap L_1 \subset \{P_0, P_2\}$.

Sea C una curva plana proyectiva irreducible de grado d . Notemos, para cada $P \in \mathbf{P}_2(\mathbf{k})$, $r_P = \text{mult}_P(C)$.

Proposición.- El número entero

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_P \frac{r_P(r_P-1)}{2}$$

es no negativo. Se denota por $g^*(C)$.

Lema.- Si C está en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0) entonces

$$g^*(C') = g^*(C) - \sum_{i=1}^s \frac{t_i(t_i-1)}{2}$$

donde $t_i = \text{mult}_{Q_i}(C')$ y los Q_i son los puntos no fundamentales de $C' \cap L_2$.

Sea $\phi : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$ una homografía. Sea $C = [F]$ una curva de \mathbf{P}_2 . Notaremos C^ϕ (y llamaremos transformada de C mediante ϕ) a la curva definida por

$$F^\phi = F^\phi(x_0, x_1, x_2) = F(\phi(x_0, x_1, x_2)).$$

Esta denominación es muy ambigua (e incluso contradictoria) pues $C^\phi = \phi^{-1}(\mathcal{V}(F))$. La mantendremos, a pesar de todo, pues es la denominación clásica.

Proposición.- Sea k de característica nula. Sea F irreducible y sea P un punto de F . Existe una homografía ϕ de \mathbf{P}_2 tal que $\phi((0 : 0 : 1)) = P$ y tal que F^ϕ está en excelente posición respecto de (P_2, P_1, P_0) .

Cada aplicación $\phi \circ \gamma$ (con ϕ homografía) se denomina transformación cuadrática general (o simplemente transformación cuadrática, si no hay riesgo de confusión).

Sea P un punto de $C = [F]$. Si F^ϕ está en excelente posición y si $\phi(0 : 0 : 1) = P$ diremos que $\phi \circ \gamma$ está centrada en P .

Teorema.- Sea C una curva plana proyectiva irreducible. Mediante una familia finita de transformaciones cuadráticas (aplicadas a C) se puede obtener una curva plana cuyos únicos puntos singulares sean puntos múltiples ordinarios.