Tema 10.- Normalidad. Cocientes. Homomorfismos. Teoremas de isomorfía.

10.1 Normalidad. Cocientes

Si G es un grupo y H es un subgrupo, los conjuntos cocientes $G/{\sim_H}$ y $G/{_H\sim}$, definidos en el tema anterior, son distintos y no siempre heredan la estructura de grupo que tiene G. Para ciertos subgrupos, en cambio, esto no sucede.

Proposición 10.1.1.– Sea H un subgrupo de G. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Las relaciones de equivalencia $\sim_H$ y ${}_H\sim$ coinciden, es decir, $xH = Hx$ para todo $x \in G$.
2. $(xH)(x'H) = (xx')H$, para cualesquiera $x, x' \in G$.
3. Para todo $x \in G$, se tiene $xHx^{-1} \subset H$.
4. Para todo $x \in G$, se tiene $xHx^{-1} = H$.

Un subgrupo H de G se dice *normal* en G si satisface las condiciones anteriores, y lo notaremos $H \lhd G$.

Corolario 10.1.2.– Si H es un subgrupo normal de G, el conjunto cociente $G/{\sim_H} = G/{_H\sim}$, que notaremos G/H, es un grupo con la operación inducida por la de G, verificándose que $eH = H$, y $(xH)^{-1} = x^{-1}H$. Además por el teorema de Lagrange, $|G/H| = |G|/|H|$.

Ejemplo 10.1.3.–

1. Para cualquier grupo G, $\{e\} \lhd G$.
2. Todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales en él.
3. El grupo de las traslaciones $T(X)$ de un espacio afín X es un subgrupo normal del grupo afín $\mathbf{GA}(X)$.
4. El grupo de los movimientos directos del plano euclídeo es un subgrupo normal del grupo de todos los movimientos del plano.
5. El conjunto de todos los giros de centro fijado en el plano es un subgrupo no normal del grupo de todos los movimientos del plano.
6. El conjunto de las homologías de centro y eje fijados en el plano proyectivo es un subgrupo no normal del grupo lineal proyectivo de todas las homografías.
7. El conjunto de matrices inversibles diagonales es un subgrupo no normal del grupo lineal $\mathbf{GL}(n, k)$.
8. El conjunto de matrices escalares λI, con $\lambda \in k \setminus \{0\}$, es un subgrupo normal del grupo lineal $\mathbf{GL}(n, k)$.

9. Los subgrupos de orden 2 de S_3 no son normales, mientras que el (único) subgrupo de orden 3 sí lo es.

10.2 Homomorfismos

Definición 10.2.1.– Sean G y G' dos grupos. Un *homomorfismo* de G en G' es una aplicación $f : G \to G'$ tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ para cualesquiera $x, y \in G$.

Nota 10.2.2.–

1. Hay que notar que en la igualdad anterior, una de las operaciones xy es en G, mientras que la otra $f(x)f(y)$ es en G'.

2. Si e y e' son los elementos neutros de G y G' respectivamente, y $f : G \to G'$ es un homomorfismo, se tiene que $f(e) = e'$ y $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, para cada $x \in G$.

Ejemplo 10.2.3.–

1. La aplicación constante $f : G \to G'$, $f(x) = e'$, para todo $x \in G$, es un homomorfismo.

2. Sea G un grupo y $x \in G$. La aplicación $i_x : G \to G$ definida por $i_x(y) = xyx^{-1}$ es un homomorfismo de G en G (llamado *interno*). Se comprueba fácilmente que i_x es biyectiva y, además, $(i_x)^{-1} = i_{x^{-1}}$.

3. Si $H \subset G$ es un subgrupo, la inclusión de H en G es un homomorfismo de grupos.

4. Si $H \lhd G$, la proyección canónica $\pi : G \to G/H$, que asocia a cada elemento su clase módulo H, es un homomorfismo de grupos.

5. La aplicación φ de la proposición 9.3.7 define un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en G. De hecho, es el único homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en G que lleva el 1 en $a \in G$.

Un *monomorfismo (epimorfismo, isomorfismo)* es un homomorfismo inyectivo (sobreyectivo, biyectivo). Un *endomorfismo (automorfismo)* de un grupo G es un homomorfismo (isomorfismo) de G en sí mismo.

El conjunto de automorfismos $\mathrm{Aut}(G)$ de un grupo G es, con la composición, un nuevo grupo. La aplicación $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$ definida por $i(x) = i_x$, para cada $x \in G$, es también un homomorfismo de grupos.

Proposición 10.2.4.– Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos.

1. Si $H \subset G$ es un subgrupo, $f(H)$ es un subgrupo de G'. En particular, la imagen $\mathrm{Im}(f)$ es un subgrupo de G'.

2. Si $H' \subset G'$ es un subgrupo (normal), $f^{-1}(H')$ es un subgrupo (normal) de G. En particular, el núcleo $\ker(f) = f^{-1}(e')$ es un subgrupo normal de G.

3. f es un monomorfismo si y sólo si $\ker(f) = \{e\}$.

Ejemplo 10.2.5.– Siguiendo los ejemplos anteriores ordenadamente, calculamos sus núcleos e imágenes.

1. $\mathrm{Im}(f) = \{e'\}$ y $\ker(f) = G$.
2. Como ya hemos dicho antes, i_x es un automorfismo de G.
3. La inclusión es un monomorfismo de H en G.
4. π es un epimorfismo con $\ker(f) = H$.
5. El núcleo del homomorfismo $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$ anterior es el conjunto $C(G)$ de elementos de G que conmutan con todos los demás elementos de G, que se llama *centro* de G.

10.3 Teoremas de isomorfía

Lema 10.3.1.– (*Propiedad universal de la proyección canónica $G \to G/H$*). Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo, y $H \lhd G$, tal que $H \subset \ker(f)$. Existe un único homomorfismo $f' : G/H \to G'$ tal que $f = f' \circ \pi$, donde π es la proyección canónica.

Basta ver que $f'(xH) = f(x)$ define el homomorfismo deseado.

Teorema 10.3.2.– *Primer teorema de isomorfía.* Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Se induce de modo natural un isomorfismo $\overline{f} : G/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$ que factoriza f en $i \circ \overline{f} \circ \pi$, siendo π el epimorfismo de G sobre $G/\ker(f)$ e i la inclusión de $\mathrm{Im}(f)$ en G'.

La demostración es análoga a la ya vista en Álgebra Lineal para los espacios vectoriales.

Teorema 10.3.3.– *Segundo teorema de isomorfía.* Sea $f : G \to G'$ un epimorfismo de grupos. Sea H' un subgrupo normal de G' y pongamos $H = f^{-1}(H')$. Entonces f induce un isomorfismo de G/H en G'/H'.

En efecto, la composición del homomorfismo f con la proyección π de G' en G'/H' es un epimorfismo de G en G'/H' cuyo núcleo es H, y por tanto el resultado es consecuencia directa del primer teorema de isomorfía.

Corolario 10.3.4.– Si H_1 y H_2 son subgrupos normales de G tales que $H_1 \subset H_2$, se tiene:

1. H_2/H_1 es un subgrupo normal de G/H_1.
2. $(G/H_1)/(H_2/H_1)$ es isomorfo a G/H_2.

Basta aplicar el segundo teorema de isomorfía a la proyección π de G sobre G/H_1.

Teorema 10.3.5.– *Tercer teorema de isomorfía.* Sea G un grupo y N y H subgrupos de G, con N normal en G. Entonces:

1. $(N \cap H) \lhd H$ y $N \lhd (NH)$.

2. La inclusión de H en NH induce un isomorfismo de $H/(N \cap H)$ en $(NH)/N$.

La composición de la inclusión de H en NH con la proyección canónica de NH sobre $(NH)/N$ es un epimorfismo cuyo núcleo coincide con $N \cap H$, de donde el resultado es una consecuencia directa del primer teorema de isomorfía.