Tema 3.- Raíces de polinomios

Definición 3.0.1.– Sea A un anillo y k un subcuerpo de A (i.e. k es un subanillo de A que es un cuerpo). Dado un polinomio $f(X) = a_d X^d + \cdots + a_0 \in k[X]$ y dado $\alpha \in A$ definimos "el valor de $f(X)$ en α" como:

$$f(\alpha) = a_d \alpha^d + \cdots + a_0 \in A.$$

Diremos que α es una *raíz* (o un *cero*) de $f(X)$ si $f(\alpha) = 0$.

Proposición 3.0.2.– (*Propiedad universal de los anillos de polinomios*) En las condiciones de la definición anterior, la aplicación $\varphi : k[X] \to A$ dada por $\varphi(f(X)) = f(\alpha)$ es el único homomorfismo de anillos tal que $\varphi(X) = \alpha$.

Ejemplo 3.0.3.– Si en la definición anterior tomamos $A = k[X]$ y $\alpha = X + a$, con $a \in k$, el homomorfismo de "sustitución"

$$f(X) \in k[X] \mapsto f(X + a) \in k[X]$$

es de hecho un automorfismo de anillos.

Por ejemplo, sea $k = \mathbb{Q}$; la sustitución de X por $X - 1$ lleva al polinomio $X^2 + X + 1$ sobre

$$(X - 1)^2 + (X - 1) + 1 = X^2 - X + 1,$$

y la sustitución de X por $X + 1$ lleva a $X^2 - X + 1$ sobre

$$(X + 1)^2 - (X + 1) + 1 = X^2 + X + 1.$$

Proposición 3.0.4.– Sea k un cuerpo, $f(X) \in k[X]$ y $\alpha \in k$. Las propiedades siguientes son equivalentes:

1. $f(\alpha) = 0$.
2. $f(X)$ es divisible por $X - \alpha$.

Corolario 3.0.5.– Sea k un cuerpo y $f(X) \in k[X]$ un polinomio no nulo de grado $d \geq 0$. Entonces $f(X)$ tiene a lo sumo d raíces distintas en k.

Definición 3.0.6.– Sea $f(X) \in k[X]$ un polinomio no nulo y $\alpha \in k$ una raíz de $f(X)$. Entonces $(X - \alpha) | f(X)$ en $K[X]$. Al máximo entero $s > 0$ tal que $(X - \alpha)^s | f(X)$ se le llama la *multiplicidad de α como raíz de $f(X)$*. Se dirá que α es una raíz simple de $f(X)$ si $s = 1$. En caso contrario se dirá que es múltiple.

Definición 3.0.7.– Sea k un cuerpo y

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n \in k[X].$$

Se define la *derivada* por la regla formal

$$f'(X) = \frac{d}{dX} f(X) = nX^{n-1} + (n-1)a_1 X^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

De la misma forma que en Cálculo elemental, se prueban las siguientes propiedades de la derivación de polinomios:

1. $(f(X) + g(X))' = f'(X) + g'(X)$.
2. Si $a \in k$, es $(af(X))' = af'(X)$.
3. $(f(X)g(X))' = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$

Las derivadas de orden superior $f^{(i)}(X)$ se definen como las derivadas sucesivas de $f(X)$.

PROPOSICIÓN 3.0.8.– Sea k el cuerpo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $f(X) \in k[X]$ un polinomio no nulo y $\alpha \in k$ una raíz de $f(X)$. La multiplicidad de la raíz α de $f(X)$ es el entero s tal que $f^{(i)}(\alpha) = 0$, para todo $i = 0, 1, \ldots, s-1$ y $f^{(s)}(\alpha) \neq 0$ (por derivada de orden cero se entiende el polinomio).

PROPOSICIÓN 3.0.9.– Todo polinomio $f(X)$ irreducible con coeficientes racionales no tiene raíces múltiples.