Tema 7.- Construcciones con regla y compás

7.1 Constructibilidad con regla y compás

Definición 7.1.1.– Dado un conjunto S de 2 o más puntos del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, diremos que una recta es *constructible (con regla y compás)* a partir de S, si dicha recta pasa por dos puntos distintos de S. Asimismo diremos que una circunferencia es *constructible (con regla y compás)* a partir de S si su centro está en S y su radio coincide con la distancia de 2 puntos de S.
Diremos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es *1-constructible* a partir de S si P está en la intersección de 2 ciclos (rectas o circunferencias) constructibles a partir de S. Diremos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es *constructible* a partir de S si existen puntos $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{R}^2$ tales que P_1 es 1-constructible a partir de S, P_2 es 1-constructible a partir de $S \cup \{P_1\}$, ..., $P = P_r$ es 1-constructible a partir de $S \cup \{P_1, \ldots, P_{r-1}\}$.
Diremos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es *constructible* (a secas) si lo es partir de $S = \{(0,0), (0,1)\}$.

Proposición 7.1.2.– En las condiciones de la definición anterior, notemos K_0 el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a las coordenadas de los puntos de S. Sea $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto 1-constructible a partir de S y sea $K_1 = K_0[x_0, y_0]$. Entonces K_1 es un cuerpo y $[K_1 : K_0] = 2^\varepsilon$, con $\varepsilon = 0$ ó 1.

Prueba: Caso 1: $P = (x_0, y_0)$ es la intersección de dos rectas que pasan por puntos distintos de S. Entonces tenemos que $x_0, y_0 \in K_0$ y por tanto $K_1 = K_0$.

Caso 2: P está en la intersección de la recta r de ecuación

$$\frac{x-p}{r-p} = \frac{y-q}{s-q}$$

con $(p,q), (r,s) \in S$ con la circunferencia Σ de ecuación

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = w^2$$

con $(t,u) \in S$ y w la distancia de dos puntos de S. Se tiene pues $p, q, r, s, t, u, w^2 \in K_0$. Por tanto x_0 es raíz del polinomio

$$(x-t)^2 + \left(\frac{s-q}{r-p}(x-p) + q - u\right)^2 = w^2,$$

$K_0[x_0]$ es un cuerpo y o bien $K_0 = K_0[x_0]$ o bien $[K_0(x_0) : K_0] = 2$, y como $y_0 \in K_0[x_0]$ concluimos que o bien $K_0 = K_1$ o bien $[K_1 : K_0] = 2$.

Caso 3: P está en la intersección de las circunferencias Σ_i, $i = 1, 2$ de ecuación

$$(x-t_i)^2 + (y-u_i)^2 = w_i^2$$

con $(t_i, u_i) \in S$ y w_i la distancia de dos puntos de S. Se tiene pues $t_i, u_i, w_i^2 \in K_0$.

Sea r la recta cuya ecuación se obtiene restando las ecuaciones de Σ_1 y de Σ_2. Evidentemente se trata de una ecuación con coeficientes en K_0 y $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \cap r$ con lo que nos reducimos al caso 2. $\square$

COROLARIO 7.1.3.– Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y K_0 el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a las coordenadas de los puntos de S. Sea $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto constructible a partir de S y sea $K_1 = K_0[x_0, y_0]$. Entonces el grado $[K_1 : K_0]$ es una potencia de 2.

7.2 Imposibilidad de ciertas construcciones

Cuadratura del círculo: No se puede construir con regla y compás a partir de los puntos de $\mathbb{R}^2$ con coordenadas racionales un cuadrado cuya área sea la del círculo unidad.

Si fuera posible entonces π sería algebraico (sobre $\mathbb{Q}$).

Trisección de un ángulo: Dado un ángulo determinado por dos semirrectas, no se puede dividir en tres partes iguales mediante construcciones con regla y compás.

Consideremos el triángulo equilátero de vértices $(0,0), (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, todos ellos constructibles (a partir de $(0,0), (0,1)$). Si se pudiera trisectar el ángulo relativo al vértice $(0,0)$ mediante regla y compás, el punto $A = (\cos(\pi/9), \sin(\pi/9))$ también sería constructible, de donde deduciríamos que el grado de $\beta = \cos(\pi/9)$ sería una potencia de 2. Ahora bien, se demuestra fácilmente que el polinomio mínimo de β (sobre $\mathbb{Q}$) es

$$f(y) = 4y^3 - 3y - \frac{1}{2}$$

lo cual es una contradicción.

(Indicación: Utilizar la identidad trigonométrica $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$ y demostrar que $f(y)$ es irreducible)

Duplicación del cubo: No se puede construir con regla y compás (a partir de $(0,0), (0,1)$) la arista de un cubo cuyo volumen es el doble que el cubo unidad.

La longitud de la arista en cuestión es $\sqrt[3]{2}$. Su polinomio mínimo (sobre $\mathbb{Q}$) es $X^3 - 2$, y por tanto su grado no es una potencia de 2.