La Teoría Algebraica de los Sistemas Diferenciales Lineales

Luis NARVÁEZ MACARRO*
Depto. de Algebra, Univ. Sevilla

Resumen

En estas notas se hace un recorrido por la Teoría Algebraica de los Sistemas Diferenciales Lineales, insistiendo en sus motivaciones, en sus nociones y resultados básicos y en sus aportaciones e interacciones con otros campos de las Matemáticas.

Palabras clave: Ecuación diferencial, D-módulo, variedad analítica, holonomía, haz constructible, problema de Riemann-Hilbert, dualidad, punto singular (ir)regular, complejo de de Rham, categoría derivada, funtor derivado.

Introducción

La Teoría Algebraica de los Sistemas Diferenciales Lineales, también llamada *Teoría de $\mathcal{D}$-módulos* o *Análisis Algebraico*, nace de la confluencia de la Teoría clásica de las Ecuaciones Lineales en Derivadas Parciales y de la Geometría Algebraica. Esta confluencia se produce a finales de los (19)60 de la mano de M. Sato y de su escuela de Kyoto, y se apoya en el vigoroso desarrollo de la Geometría Algebraica impulsado por A. Grothendieck y su escuela desde finales de los (19)50.

A lo largo de treinta años, la Teoría Algebraica de los Sistemas Diferenciales Lineales se ha constituido en una disciplina "puente" entre importantes campos de las Matemáticas, como son la propia Geometría Algebraica y la Teoría de Singularidades, la Topología de Variedades, la Teoría de Representaciones de Grupos de Lie y, por supuesto, las propias Ecuaciones Diferenciales. Esto ha supuesto en mucho casos un alto grado de sofisticación, lo que se ha traducido en dificultad de acceso.

El papel que juega el Álgebra y la Geometría Algebraica dentro de la Teoría guarda similitud con el jugado por las Matemáticas respecto de otras Ciencias, especialmente

*Supported by DGICYT PB97-0723 and AECI.

de la Física. Si bien los desarrollos matemáticos puros no son en muchas ocasiones necesarios estrictamente hablando para las aplicaciones más inmediatas, no es menos verdad que a medio y a largo plazo es en las teorías matemáticas abstractas donde las teorías físicas encuentran su alojamiento. Puede que para encontrar una solución, exacta o aproximada, de una ecuación diferencial (problema inmediato), la Teoría Algebraica no sea determinante, pero también es cierto que la Teoría Algebraica ha sido capaz de descubrir aspectos profundos de las ecuaciones diferenciales que estaban ocultos en la teoría clásica, y que por otra parte les pertenecen como los demás.

Estas notas intentan divulgar algunos de los aspectos anteriores y se dirigen muy particularmente a los especialistas en otros campos de las Matemáticas y a los investigadores en formación en el amplio ámbito de la Geometría Algebraica. En ellas nos marcamos tres objetivos principales.

En primer lugar, tratamos de ofrecer al lector un recorrido por la Teoría de $\mathcal{D}$-módulos, desde sus orígenes en los trabajos [80], [170], hasta algunos de sus desarrollos y aplicaciones más recientes –representaciones de grupos, irregularidad, cohomología p-ádica, etc.–, pasando por los resultados centrales –polinomio de Bernstein-Sato y su relación con la topología de las singularidades (Malgrange), teorema de constructibilidad de Kashiwara, teoremas de dualidad de Mebkhout, problema de Riemann-Hilbert de Mebkhout-Kashiwara, complejo de "irregularidad" de Mebkhout, etc.–. Este recorrido se apoya en una relativamente extensa lista de referencias, que no pretende ser exhaustiva, pero que si la unimos a las "referencias de las referencias" debería mostrar un más que alto porcentaje de la literatura existente en la actualidad.

En segundo lugar, deseamos ubicar nuestra actividad científica y nuestros intereses investigadores, así como los de buena parte del grupo de investigación del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla al que pertenecemos. Para ello, en aquellos puntos de la teoría donde existen aportaciones, las hemos señalado indicando las referencias correspondientes.

En tercer y último lugar, intentamos dar una introducción a la Teoría de $\mathcal{D}$-módulos donde se explique la conexión con las ecuaciones diferenciales y se motive la introducción de los métodos algebraicos. Esto podría constituir el punto de partida de un estudio más profundo y detallado, basado en algunos de los textos generales existentes: [120], [17], [126], [101], [19], [134], [91], [110], [18], [111].

Pasamos ahora a comentar el contenido de las notas. La sección 1 contiene el material y las observaciones de partida que motivan la aparición de los métodos algebraicos en el estudio de los sistemas diferenciales lineales. Tiene un carácter elemental y usa un lenguaje poco especializado.

La sección 2 describe los ingredientes fundamentales de la Teoría. Su comprensión requiere algunos conocimientos básicos de variedades (diferenciables, analíticas o algebraicas). El apartado 2.5 está dedicado al polinomio de Bernstein-Sato, y en él se describe la motivación original respecto de la existencia de soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes.

En la sección 3 se aborda el papel jugado por la Teoría de $\mathcal{D}$-módulos en relación con la dualidad topológica de Poincaré y la dualidad analítica de Serre.

La sección 4 está dedicada al resultado central de la Teoría de $\mathcal{D}$-módulos: el problema de Riemann-Hilbert. Se conecta con el Teorema de Comparación de Grothendieck y con los resultados “clásicos” de Deligne, pasando por la definición general de “regularidad” y la noción de “haz perverso”.

En la sección 5 se explica el papel jugado por los anillos de operadores diferenciales de orden infinito.

En la sección 6 se enumeran brevemente diversos desarrollos recientes de la Teoría de $\mathcal{D}$-módulos, así como algunos de los campos en donde ha tenido sus aplicaciones más espectaculares.

Por último, agradecemos al comité organizador del (Primer) Encuentro de Matemáticos Andaluces la invitación para impartir una de las conferencias plenarias, origen de estas notas. También agradecemos al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina) la hospitalidad durante una estancia en Agosto de 2000 en la que ultimamos la redacción de las mismas.

1 Aspectos algebraicos de los sistemas lineales de ecuaciones en derivadas parciales

Consideremos para empezar una ecuación diferencial lineal ordinaria

$$a_m(x)y^{(m)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i pertenecen a algún anillo A de “funciones de una variable” infinitamente derivables. Por ejemplo, A puede ser uno de los anillos siguientes:
(A) El anillo de las funciones C^∞ sobre un intervalo de la recta real.
(B) El anillo de las funciones analíticas sobre un intervalo de la recta real.
(C) El anillo de las funciones holomorfas sobre un dominio de la recta compleja.
(D) El anillo de las series convergentes en una variable con coeficientes reales o complejos.
(E) El anillo de los polinomios o de las series formales en una variable con coeficientes racionales, reales o complejos, o incluso en un cuerpo abstracto de característica nula.

El conjunto de los endomorfismos k-lineales de A, $\mathrm{End}_k(A)$, dotado de la suma y la composición de endomorfismos, es un anillo con unidad (el endomorfismo identidad) que no es conmutativo en general. Todo elemento de $a \in A$ determina un endomorfismo, que también notamos $a : A \to A$, dado por la multiplicación: $a(b) = ab, \quad \forall b \in A$. De esta forma podemos considerar $A \subset \mathrm{End}_k(A)$.

Notemos por $\partial = \frac{d}{dx} : A \to A$ el operador derivación y por k el cuerpo de las constantes, i.e. $k = \{a \in A, \partial(a) = 0\}$, que dependiendo de los casos será el cuerpo de los reales, el cuerpo de los complejos o un cuerpo arbitrario de característica nula. Es claro que $\partial \in \mathrm{End}_k(A)$ y que, por la regla de Leibnitz, se tiene:

$$\partial \circ a = a \circ \partial + a', \quad \forall a \in A. \tag{2}$$

Consideremos el subanillo D de $\mathrm{End}_k(A)$ generado por A y por ∂. Los elementos de D pueden escribirse de manera única en la forma $a_m \circ \partial^m + \cdots + a_0$ con $m \geq 0$ y $a_i \in A$. A dichos elementos los denominamos *operadores diferenciales (k-lineales) (O.D.L.) con coeficientes en A*. Podemos pues escribir $D = A[\partial]$, lo que indica que los elementos de D admiten una expresión polinomial única como la anterior, pero hemos de tener en cuenta que la aritmética de la composición proviene de la relación (2). De ahora en adelante, para aligerar la escritura, la composición de operadores se notará con una simple yuxtaposición.

La búsqueda de las soluciones de nuestra ecuación de partida (1) puede realizarse en el espacio de funciones A o en cualquier otro k-espacio vectorial E donde tenga sentido la multiplicación (por la izquierda) por elementos de A así como la acción (también por la izquierda) de ∂, ambos de manera compatible con la regla de Leibnitz (e.g. un espacio de distribuciones). Esto es lo que en el lenguaje algebraico denominamos un *D-módulo a la izquierda*.

La ecuación (1) puede escribirse $P \cdot y = 0$ donde $P = a_m\partial^m + \cdots + a_0 \in D$ e y es la incógnita perteneciente a E. Notemos $sol(P, E)$ al espacio vectorial de las soluciones de (1) en E, i.e. $sol(P, E) = \{y \in E \mid P \cdot y = 0\} = \ker P_E$, donde P_E es el endomorfismo de espacios vectoriales[1] $P_E : y \in E \mapsto P \cdot y \in E$.

Una observación básica, y al mismo tiempo absolutamente elemental, es la existencia de un isomorfismo canónico $sol(P, E) \simeq \mathrm{Hom}_D(D/DP, E)$ dado por $y \mapsto \left[\overline{Q} \mapsto Q(y)\right]$, donde DP designa el ideal a la izquierda de D generado por P, D/DP el correspondiente D-módulo cociente y $\mathrm{Hom}_D(D/DP, E)$ el espacio de los homomorfismos D-lineales de D/DP en E. Como consecuencia de la no conmutatividad del anillo D, hemos de observar que este último espacio tan sólo hereda una estructura vectorial sobre el cuerpo k de constantes[2].

La observación anterior nos dice que, al menos desde un punto de vista cuantitativo, las soluciones de la ecuación (1) dependen exclusivamente del D-módulo (a la izquierda) D/DP, y no del mismo P.

Analicemos ahora la ecuación no homogénea

$$a_m(x)y^{(m)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Py = b, \tag{3}$$

donde b es un elemento del D-módulo a la izquierda[3] E e $y \in E$ es la incógnita. Una cuestión fundamental es conocer para qué elementos $b \in E$ la ecuación (3) tiene soluciones. El espacio vectorial $\mathrm{coker}\, P_E = E/\, \mathrm{Im}\, P_E$ responde cuantitativamente a

[1]Como el anillo D no es conmutativo, P_E no es D-lineal, tan sólo es k-lineal.

[2]Este cuerpo es justamente el *centro* del anillo D.

[3]Recordemos que E puede ser el mismo espacio de funciones A donde están los a_i, o cualquier otro espacio de interés para la teoría clásica, como por ejemplo, un espacio de distribuciones.

esta cuestión. Así, la ecuación (3) tiene soluciones para cualquier $b \in E$ si y sólo si $\operatorname{coker} P_E = 0$. Dicho de otra forma, el espacio vectorial $\operatorname{coker} P_E$ mide la obstrucción para resolver dicha ecuación. Pues bien, veamos cómo el Álgebra Homológica nos permite concluir en qué forma este espacio depende en realidad del D-módulo D/DP y no del operador P de partida, al igual que ocurría en el caso de $sol(P, E) = \ker P_E$.

Bajo ciertas condiciones sobre el anillo de "funciones" A que aseguren su noetherianidad[4] (p. ej., en los casos (D) y (E), y desde el punto de vista local *–teoría de haces–* al que nos referiremos más tarde, en el caso (C)) deducimos que el propio anillo D es noetheriano (a la izquierda y a la derecha). Esta propiedad implica que para cada D-módulo (a la izquierda) N finitamente generado y para cada sistema de generadores $n_1, \ldots, n_{r_0} \in N$ de N, el epimorfismo de D-módulos $\varphi_0 : (P_1, \ldots, P_{r_0}) \in D^{r_0} \mapsto \sum P_i n_i \in N$ tiene un núcleo $K_0 = \ker \varphi_0$ que es de nuevo un D-módulo (a la izquierda) finitamente generado. Podemos por tanto elegir un sistema finito de generadores $e_1, \ldots, e_{r_1} \in K_0$ y considerar el correspondiente epimorfismo de D-módulos $\varphi_1 : (P_1, \ldots, P_{r_1}) \in D^{r_1} \mapsto \sum P_i e_i \in K_0$. Iterando este proceso, encontramos una sucesión de homomorfismos de D-módulos

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{i+1}} D^{r_i} \xrightarrow{\varphi_i} D^{r_{i-1}} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} D^{r_1} \xrightarrow{\varphi_1} D^{r_0} \xrightarrow{\varphi_0} N \longrightarrow 0 \tag{4}$$

cuyas composiciones sucesivas $\varphi_i \circ \varphi_{i+1}$ se anulan (*complejo*) que verifican la propiedad de *exactitud* $\ker \varphi_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1}, \quad \forall i \geq 0$ y φ_0 es sobreyectivo. Dicha sucesión se denomina una *resolución libre* del D-módulo N, y aunque en principio depende de las distintas elecciones de generadores que hayamos hecho, es única en un cierto sentido que ahora no vamos a precisar[5].

Además de la noetherianidad, el anillo D goza de otra propiedad fundamental: tiene *dimensión homológica* finita (cf. [163, 180]). En nuestro caso, esta propiedad se traduce en la existencia de un entero $d \geq 0$ tal que, para cada D-módulo finitamente generado N, podemos encontrar una resolución (4) de longitud finita $e \leq d$:

$$0 \longrightarrow D^{r_e} \xrightarrow{\varphi_e} D^{r_{e-1}} \xrightarrow{\varphi_{e-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} D^{r_0} \xrightarrow{\varphi_0} N \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Esto ocurrirá justamente cuando al calcular $\ker \varphi_{e-1}$ veamos que es un D-módulo libre.

De esta forma, el D-módulo N puede reemplazarse por una de sus resoluciones libres finitas $\boldsymbol{L} = D^{r_e} \xrightarrow{\varphi_e} D^{r_{e-1}} \xrightarrow{\varphi_{e-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} D^{r_0}$, que según hemos dicho, es única en un sentido conveniente. Los homomorfismos $\varphi_i : D^{r_i} \to D^{r_{i-1}}$, al estar definidos entre módulos libres, vienen dados por matrices de operadores diferenciales $\Phi^{(i)} = (\phi^{(i)}_{jk})$ de tamaño $r_i \times r_{i-1}$: $\varphi_i(P_1, \ldots, P_{r_i}) = (P_1, \ldots, P_{r_i})\Phi^{(i)}$.

El Álgebra Homológica nos enseña la noción de *funtor derivado total* (cf. [179, 73]; ver también [142]) de $\operatorname{Hom}_D(-, E)$, que se nota por $R\operatorname{Hom}_D(-, E)$, y cuyo valor en

[4] Se dice que un anillo es *noetheriano* (a la izquierda) si todos sus ideales (a la izquierda) son finitamente generados.

[5] Para ello es necesario recurrir a la noción de *categoría derivada* de la categoría abeliana de los D-módulos (a la izquierda) (ver por ej. [179, 73]; ver también [142]).

N puede calcularse mediante alguna resolución libre $\boldsymbol{L}$ de N:

$$R\operatorname{Hom}_D(N,E) = \operatorname{Hom}_D(\boldsymbol{L},E) = E^{r_0} \xrightarrow{\varphi_1^*} E^{r_1} \xrightarrow{\varphi_2^*} \cdots \xrightarrow{\varphi_e^*} E^{r_e}.$$

Los $\varphi_i^* : E^{r_{i-1}} \to E^{r_i}$ vendrán dados por la acción de las matrices $\Phi^{(i)}$ de operadores diferenciales: $\varphi_i^*(y_1,\dots,y_{r_{i-1}}) = (z_1,\dots,z_{r_i})$, $z_j = \sum \phi_{jk}^{(i)} y_k$. El objeto $R\operatorname{Hom}_D(N,E)$ es pues un *complejo* de espacios vectoriales que está unívocamente definido en el sentido de las *categorías derivadas* (recordemos la "unicidad" de $\boldsymbol{L}$). A sus distintos *grupos de (co)homología* se les denota por $\operatorname{Ext}_D^i(N,E) := h^i\, R\operatorname{Hom}_D(N,E) = \ker\varphi_{i+1}/\operatorname{Im}\varphi_i$, $\quad i \geq 0$. Para $i=0$ se tiene $\operatorname{Ext}_D^0(N,E) = \operatorname{Hom}_D(N,E)$.

Volviendo al ejemplo surgido de la ecuación (1), una resolución libre del módulo $N = D/DP$ es claramente $0 \to D \xrightarrow{\cdot P} D \to N \to 0$. El complejo $R\operatorname{Hom}_D(D/DP,E)$ queda pues encarnado en $0 \to E \xrightarrow{P\cdot = P_E} E \to 0$ y por tanto se tienen unos isomorfismos canónicos

$$\begin{gathered} sol(P,E) = \ker P_E \simeq h^0\, R\operatorname{Hom}_D(N,E) = \operatorname{Hom}_D(N,E) \\ \operatorname{coker} P_E \simeq h^1\, R\operatorname{Hom}_D(N,E) = \operatorname{Ext}_D^1(N,E) \\ h^i\, R\operatorname{Hom}_D(N,E) = \operatorname{Ext}_D^i(N,E) = 0, \quad \forall i \neq 0,1. \end{gathered}$$

Deducimos pues, que no sólo el espacio $sol(P,E) = \ker P_E$ depende en realidad del D-módulo D/DP como ya sabíamos, sino que lo mismo ocurre para el espacio $\operatorname{coker} P_E$. Además, ambos espacios se obtienen tomando las (co)homologías de grados 0 y 1 respectivamente del complejo $R\operatorname{Hom}_D(D/DP,E)$. Por tanto, este complejo encierra una interesante información cuantitativa de las ecuaciones diferenciales (1) y (3) en lo que a las soluciones en E se refiere, o si se quiere, dicha información cuantitativa está presente en el funtor $R\operatorname{Hom}_D(D/DP,-)$ con independencia del espacio donde estemos buscando nuestras soluciones.

Todo lo anterior puede ser generalizado en 4 direcciones distintas:
1) Sistemas de ecuaciones lineales (varias ecuaciones en lugar de una sola ecuación).
2) Ecuaciones de varias variables, i.e. ecuaciones en derivadas parciales (en dimensión cualquiera en lugar de la dimensión 1).
3) Estudio de las soluciones de los sistemas en abiertos arbitrarios contenidos en el abierto de definición del sistema, así como de las propiedades de prolongación de las soluciones (el comportamiento de un mismo SELDP puede ser radicalmente distinto de un abierto a otro).
4) Estudio intrínseco de las propiedades de los SELDP, con independencia de las coordenadas locales (trabajar en el marco de las variedades diferenciables, analíticas reales o complejas, algebraicas, etc. en lugar de dominios de la recta real o compleja).

La extensión a los casos 1) y 2) es inmediata: basta considerar como anillo A un anillo de "funciones de varias variables $x_1,\dots,x_d$" (el anillo de las funciones C^∞ o analíticas sobre un abierto de $\mathbb{R}^d$, o el anillo de las funciones holomorfas sobre un abierto de $\mathbb{C}^d$, o el anillo de las series convergentes en d variables con coeficientes reales o complejos, o el anillo de los polinomios o de las series formales en d variables con coeficientes racionales, reales o complejos, o incluso en un cuerpo abstracto de característica nula) y como anillo D al anillo $A[\partial_1, \ldots, \partial_d] \subset \operatorname{End}_k(A)$, donde los ∂_i son las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i}$ y k es el cuerpo de constantes.

En lugar de considerar una sola ecuación como en (1) podemos considerar un sistema de ecuaciones lineales en derivadas parciales:

$$\begin{array}{cccc} P_{11}y_1 & + \cdots + & P_{1r_0}y_{r_0} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{r_1 1}y_1 & + \cdots + & P_{r_1 r_0}y_{r_0} & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

donde los $P_{ij} \in D$ son operadores diferenciales en derivadas parciales con coeficientes en A.

De forma similar al caso de las ecuaciones ordinarias, el sistema (6) da lugar al D-módulo $N = D^{r_0}/K$, donde K es el submódulo de D^{r_0} generado por $(P_{i1}, \cdots, P_{ir_0})$, $1 \leq i \leq r_1$. Si E es un D-módulo (a la izquierda), el espacio de las soluciones de (6) en E es canónicamente isomorfo a $\operatorname{Hom}_D(D^{r_0}/K, E)$.

También en este caso podemos considerar el complejo $R\operatorname{Hom}_D(N, E)$ cuyo h^0 se identifica al espacio de las soluciones de nuestra sistema de partida y cuyo h^1 nos da información cuantitativa acerca del sistema no homogéneo. Pero el complejo $R\operatorname{Hom}_D(N, E)$ contiene mucha más información: en el caso de un sistema, no sólo disponemos de sus dos primeros espacios de (co)homología h^0 y h^1, sino de todos los h^i con $i = 2, 3, \ldots$ que la teoría clásica no detecta...

La extensión al caso 3) necesita de la consideración sistemática de objetos que manejen simultáneamente todos los abiertos contenidos en el dominio de definición. Estos objetos se denominan *haces*. Así, si $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ es un abierto, en lugar de considerar el anillo A de las funciones holomorfas en Ω debemos considerar el *haz de las funciones holomorfas sobre* Ω, $\mathcal{O}_\Omega$, que a cada abierto $U \subset \Omega$ asocia el anillo $\mathcal{O}_\Omega(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es una función holomorfa}\}$. De manera análoga, en lugar de considerar el anillo D de los operadores diferenciales lineales con coeficientes en A debemos considerar el *haz de los operadores diferenciales* $\mathcal{D}_\Omega$ que a cada abierto $U \subset \Omega$ asocia el anillo de los operadores diferenciales sobre U, $\mathcal{D}_\Omega(U) = \mathcal{O}_\Omega(U)[\partial_1, \ldots, \partial_d]$.

La extensión al caso 4) se realiza mediante el estudio de los anillos (y haces) de operadores diferenciales en el marco de las variedades (diferenciales, analíticas o algebraicas), con independencia de los sistemas de coordenadas locales.

En la siguiente sección veremos cómo la *Teoría de D-módulos* permite la generalización simultánea de todo lo expuesto con anterioridad en las 4 direcciones señaladas.

2 Objetos y resultados básicos de la Teoría de los $\mathcal{D}$ -módulos

Aunque muchas de las nociones que vamos a tratar guardan sentido en el caso de las variedades diferenciables, nos centraremos en el caso de las variedades analíticas complejas lisas o de las variedades algebraicas lisas sobre un cuerpo de característica 0, que es donde se verifican las principales propiedades de finitud. Esto representa en principio una restricción, pero en la práctica no es tal pues casi todos los sistemas que nos "interesan" tienen coeficientes polinómicos o analíticos.

Por otra parte, hemos omitido toda referencia a las operaciones geométricas (imágenes directas e imágenes inversas) por considerar que, a pesar de su papel central en la teoría, exigirían un esfuerzo técnico más allá de los objetivos de estas notas. Esta omisión puede ser fácilmente cubierta con la lista de referencias generales dada en la Introducción.

2.1 El haz de los operadores diferenciales $\mathcal{D}_X$

Sea X una variedad analítica o algebraica lisas sobre el cuerpo de los complejos[6] de dimensión d. Notaremos por $\mathcal{O}_X$ el haz estructural, i.e. para cada abierto $U \subset X$, $\mathcal{O}_X(U)$ representa el espacio de las funciones regulares u holomorfas, según el caso, definidas en U (cf. [72, 66]).

Notaremos por $\mathcal{D}_X$ el haz de los operadores diferenciales lineales sobre X. De manera intrínseca [69, §16], se trata del subhaz del haz de los endomorfismos $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$, reunión filtrante creciente de los $\mathcal{D}_X^{(l)}, l \geq 0$, definidos inductivamente por $\mathcal{D}_X^{(0)} := \mathcal{O}_X$ y

$$\mathcal{D}_X^{(l+1)}(U) := \{P \in End_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_U) \mid [P_x, a] \in \mathcal{D}_{X,x}^{(l)}, \forall a \in \mathcal{O}_{X,x}, \forall x \in U\},$$

para cada abierto U de X. Si $(U; x_1, \ldots, x_d)$ es una carta local de X, las secciones de $\mathcal{D}_X^{(l)}$ sobre U se escriben de manera única $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq l} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{x}^\alpha}$, donde los $a_\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$.

El graduado de $\mathcal{D}_X$ para la filtración precedente, $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X) = \oplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{D}_X^{(l)} / \mathcal{D}_X^{(l-1)}$, se indentifica canónicamente con el álgebra simétrica del *haz tangente* (haz de los campos vectoriales) de X, $Der_k(\mathcal{O}_X)$. Se trata por tanto de un haz de anillos conmutativos, y si $\pi : T^*X \to X$ denota el espacio cotangente de X, se tiene una inclusión natural $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X) \hookrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{T^*X}$, que permite interpretar a las secciones de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X)$ como las funciones holomorfas o regulares sobre T^*X que son polinómicas en las fibras de π. En el caso algebraico, esta inclusión es un isomorfismo[7]. Vemos así una relación

[6] En el caso algebraico, podríamos también considerar el caso de un cuerpo base de característica 0 arbitrario.

[7] En el caso analítico complejo (resp. algebraico) , el espacio cotangente T^*X se identifica con $\mathrm{Specan}\, \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_)$ (resp. con $\mathrm{Spec}\, \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_X$) (cf. [120, exp. 1]).

precisa e intrínseca entre los operadores diferenciales sobre X y el espacio cotangente, que explica el papel fundamental de este último en el estudio de los SELDP (*Análisis Microlocal*). Concretamente, dado un operador diferencial P de orden l de expresión en coordenadas locales $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d,|\alpha|\leq l} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{x}^\alpha}$, su *símbolo principal* $\sigma(P) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d,|\alpha|=l} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_d^{\alpha_d}$ se interpreta como una función en T^*X, independiente del sistema de coordenadas elegido.

Ejemplo 1 *Sea $X = \mathbb{C}^d$ el espacio afín complejo de dimension d, considerado como variedad algebraica. Entonces el espacio de las secciones globales de $\mathcal{D}_X$ se identifica al algebra de Weyl $\mathbb{W}_d(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_d,\partial_1,\dots,\partial_d]$ con relaciones $x_ix_j = x_jx_i, \quad \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i, \quad \partial_i x_j = x_j\partial_i - \delta_{ij}, \quad 1\leq i,j\leq d$ (cf. [17, 121, 42, 154]).*

El siguiente teorema resume las propiedades fundamentales de $\mathcal{D}_X$:

Teorema 2 *1) $\mathcal{D}_X$ es un haz de anillos coherente*[8] *a la izquierda y a la derecha (cf. [70]). 2) Para cada punto $p\in X$, la fibra $\mathcal{D}_{X,p}$ es un anillo filtrado noetheriano noetheriano a la izquierda y a la derecha, cuyo graduado es un anillo de polinomios en d variables con coeficientes en el anillo local regular $\mathcal{O}_{X,p}$. 3) Para cada punto $p\in X$, el anillo $\mathcal{D}_{X,p}$ tiene dimensión homológica global finita, igual a* $\dim X = d$.

La prueba de estas propiedades se podrá consultar en [120, exp. 1], [17], [134], [64]. Las propiedades anteriores permiten reducir en buena parte el estudio del haz $\mathcal{D}_X$ y de sus módulos *coherentes* al estudio puramente algebraico (Teoría de Anillos) de los anillos filtrados noetherianos *de tipo diff* (cf. por ejemplo [17, 141, 103]).

Ejemplo 3

1. *El haz estructural $\mathcal{O}_X$ tiene una estructura evidente de $\mathcal{D}_X$-módulo a la izquierda, pues $\mathcal{D}_X \subset End_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$.*

2. *El haz dualizante $\omega_X = \wedge^d\Omega^1_X$ tiene una estructura canónica de $\mathcal{D}_X$-módulo a la derecha (cf. [157]. Ver también [140] para una discusión general). En coordenadas locales, si $\theta = f(\underline{x})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d$ es una sección de ω_X y $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha(\underline{x})\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\underline{x}^\alpha}$ es un operador diferencial, se tiene $\theta P = P^t(f)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d$, con $P^t = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha(\underline{x})\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\underline{x}^\alpha}$ es el operador* traspuesto *en el sentido clásico.*

3. *Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, dar a $\mathcal{E}$ una estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo a la izquierda que extienda a la de $\mathcal{O}_X$-módulo es equivalente a dar una* conexión *integrable, i.e. un morfismo k-lineal $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$, que satisface la regla de Leibnitz $\nabla(fm) = f\nabla(m) + (df)\otimes m$, para cada sección m de $\mathcal{E}$ y cada sección f de $\mathcal{O}_X$, y que es integrable en el sentido de que $\nabla_{[\delta_1,\delta_2]} = [\nabla_{\delta_1},\nabla_{\delta_2}]$ para cada par de campos de vectores (derivaciones) δ_1,δ_2, donde $\nabla_\delta : m\mapsto \nabla_\delta(m) := \langle\delta,\nabla(m)\rangle$ representa la* derivada covariante *respecto de δ.*

[8]La propiedad de coherencia es una propiedad de carácter local sobre los haces de anillos que juega un papel similar a la noetherianidad.

2.2 $\mathcal{D}_X$-módulos coherentes y holónomos

Un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$ se dice que es coherente (cf. [134, 64]) si existe un recubrimiento abierto $X = \cup U_i$ tal que para cada abierto U_i la restricción $\mathcal{M}|_{U_i}$ admite una presentación

$$(\mathcal{D}_X|_{U_i})^r \xrightarrow{\varphi} (\mathcal{D}_X|_{U_i})^s \to \mathcal{M}|_{U_i} \to 0,$$

o lo que es lo mismo, $\mathcal{M}|_{U_i} \simeq \operatorname{coker}\varphi$, donde φ vendrá dada por una matriz Φ de operadores diferenciales lineales en U_i. Así pues, localmente un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente viene dado por una matriz de operadores diferenciales, que determina un SELDP como (6). Podemos pues pensar que la noción de $\mathcal{D}_X$-módulo coherente sobre una variedad es una versión intrínseca y global de la de SELDP, al menos en lo que a los aspectos cuantitativos se refiere tal como explicamos en la sección anterior.

Ejemplo 4 *1. El haz estructural $\mathcal{O}_X$ es coherente, pues admite una presentación $\mathcal{O}_U = \mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U \cdot (\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_d})$ sobre cada carta local $(U; x_1, \ldots, x_d)$. De hecho, esta presentación puede globalizarse sin utilizar coordenadas y obtener así una resolución localmente libre definida en todo X*

$$0 \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^d \mathcal{T} \to \cdots \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T} \to \mathcal{O}_X \to 0, \tag{7}$$

donde $\mathcal{T} = Der_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) = Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ es el haz tangente[9], y las diferenciales vienen dadas por

$$P \otimes (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p) \mapsto \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1}(P\xi_i) \otimes (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \wedge \xi_p) +$$
$$+ \sum_{1 \le i \le j \le p}^p (-1)^{i+j} P \otimes ([\xi_i, \xi_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \widehat{\xi_i} \wedge \cdots \wedge \xi_p).$$

Esta es la llamada resolución de Spencer *de $\mathcal{O}_X$ (cf. [134, chap. I, (2.1.17)]).*

2. Con la ayuda de la resolución de Spencer, se prueba la existencia de un isomorfismo canónico de $\mathcal{D}_X$-módulos a la derecha $\omega_X \simeq Ext^d_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X)$, con lo que ω_X también es coherente.

Existe una manera canónica de intercambiar $\mathcal{D}_X$-módulos a la izquierda con $\mathcal{D}_X$-módulos a la derecha, cuyos detalles omitiremos en estas notas (cf. [157, 37]).

Dada una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de orden l en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, $Py = 0$, con $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \le l} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{x}^\alpha}$, la teoría clásica nos enseña que un objeto básico a considerar es su *variedad característica*, dada por

$$\{(\underline{x}, \underline{\xi}) \in \Omega \times \mathbb{C}^d \mid \sigma(P)(\underline{x}, \underline{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = l} a_\alpha(\underline{x}) \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d}\}.$$

Al igual que en los aspectos cuantitativos de las soluciones, estudiados en la sección anterior, la variedad característica es un objeto geométrico que en realidad no depende

[9] Sus secciones locales son los campos de vectores.

de la ecuación misma, sino del D-módulo que determina. Es más, en el caso de los sistemas, la variedad característica no puede definirse simplemente como la intersección de las variedades características de cada una de las ecuaciones, sino que necesitamos recurrir al Álgebra y a la Geometría Algebraica para su correcta definición.

Sin entrar en muchos detalles, dado un $\mathcal{D}_X$-módulo (a la izquierda o a la derecha) coherente $\mathcal{M}$, con la ayuda de las *buenas filtraciones locales* (cf. [64]), podemos definir su *variedad característica*, notada $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$. Se trata de un cerrado analítico (o algebraico) cónico del fibrado cotangente de X. La propiedad fundamental de $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ es su carácter *involutivo* respecto de la estructura simpléctica canónica de T^*X. Este resultado se conoce como la *involutividad de las características* [170] (cf. también [117, 64], y [56] para una prueba puramente algebraica). Una primera consecuencia de la involutividad es la llamada *desigualdad de Bernstein*: para cada $\mathcal{D}_X$-módulo (a la izquierda o a la derecha) no nulo, se tiene $\dim(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) \geq \dim(X)$. Esta desigualdad juega un papel fundamental en la definición de los módulos *holónomos* que veremos a continuación, y de hecho puede probarse sin pasar por la involutividad (cf. [134]).

La variedad característica de un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente, y por ende de un SELDP, es un objeto geométrico que contiene toda la información acerca de sus singularidades (ver a título de ejemplo la proposición 12).

Es fácil ver que la variedad característica es "aditiva" con respecto a las sucesiones exactas: Si $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{D}_X$-módulos coherentes no nulos, entonces $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}(\mathcal{M}') \cup \mathrm{Ch}(\mathcal{M}'')$.

Definición 5 *(del algebrista) Se dice que un $\mathcal{D}_X$-módulo a la izquierda (o a la derecha) coherente es* holónomo *(o de* dimensión minimal*) si $Ext^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = 0$ si $i \neq d = \dim(X)$.*

Definición 6 *(del geómetra) Se dice que un $\mathcal{D}_X$-módulo a la izquierda (o a la derecha) coherente es* holónomo *(o de* dimensión minimal*) si* $\dim(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) = \dim(X)$.

Las dos definiciones anteriores son equivalentes (cf. [134, 64]).

Ejemplo 7 *Se tiene: 1)* $\mathrm{Ch}(\mathcal{D}_X) = T^*X$. *2)* $\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X) = T^*_X(X)$*, y por tanto $\mathcal{O}_X$ es holónomo. 3) De acuerdo con la proposición 12, todo $\mathcal{D}_X$-módulo que sea localmente libre de rango finito sobre $\mathcal{O}_X$ es holónomo.*

Notaremos por $\mathrm{Hol}(X)$ la categoría de los $\mathcal{D}_X$-módulos coherentes y holónomos. Es fácil demostrar que dicha categoría es abeliana y estable por extensiones (cf. [120, 17, 134]).

Como consecuencia del teorema de involutividad de las características, todas las componentes irreducibles de la variedad característica de un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente son *lagrangianas* (cf. [157, 64]), y por tanto son de la forma $T^*_Y(X)$, donde Y es un subconjunto analítico (o algebraico) de X (aquí hemos escrito $T^*_Y(X)$ para la adherencia en T^*X del conormal a la parte lisa de Y).

2.3 El complejo de soluciones y el complejo de de Rham de un $\mathcal{D}$-módulo

Motivados por lo estudiado en la sección 1, damos la siguiente definición [82]:

Definición 8 *Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo a la izquierda, se define su* complejo de soluciones *mediante la expresión $Sol(\mathcal{M}) = R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$.*

En la definición anterior, y siguiendo los ejemplos estudiados en la sección 1, se considera primeramente el funtor (contravariante) $Hom_{\mathcal{D}_X}(-, \mathcal{O}_X) : \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ de la categoría de de los $\mathcal{D}_X$-módulos a la izquierda en la categoría de los haces de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales (o $\mathbb{C}_X$-módulos), que es exacto a la izquierda. La teoría general (cf. [179, 73]; ver también [142]) nos permite considerar el *funtor derivado total*

$$R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(-, \mathcal{O}_X) : \mathrm{D}^+(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^+(\mathbb{C}_X)$$

entre las correspondientes categorías derivadas, que puede ser calculado mediante una resolución *inyectiva* de $\mathcal{O}_X$, que siempre existe (cf. [60]), o bien mediante resoluciones (localmente) libres de $\mathcal{M}$, de manera similar a como hicimos en la sección 1. No obstante, en el caso de los haces, no siempre existen resoluciones (localmente) libres de $\mathcal{M}$, pero definidas en todo X, que también serían suficientes para el cálculo de $Sol(\mathcal{M})$ (por ejemplo la resolución de Spencer para $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ dada en (7)).

Definición 9 *Dado un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$, definimos su complejo de de Rham por (cf. [157, 37]):*

$$DR(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \to \cdots \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^d_X$$

(en grados $[0, d]$), donde la diferencial viene dada en coordenadas locales por

$$m \otimes \omega \mapsto m \otimes (d\omega) + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_i} m) \otimes (dx_i \wedge \omega),$$

para cada sección local m de $\mathcal{M}$ y cada forma diferencial ω.

Proposición 10 *El complejo de de Rham admite las descripciones equivalentes siguientes:*

$DR(\mathcal{M}) = R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$.

$DR(\mathcal{M}) = (\omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})[-\dim X]$ *("$\mathbf{L}$" designa* funtor derivado total a la izquierda *cf. [179, 73]; ver también [142]).*

Las dos descripciones anteriores permiten considerar el "complejo de de Rham" como un funtor (covariante)

$$DR \colon \mathrm{D}^+(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathbb{C}_X).$$

Ejemplo 11 *El complejo de de Rham del $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{O}_X$ no es más que el complejo de de Rham usual de X, que de acuerdo con el lema de Poincaré (en el caso analítico complejo) es una resolución del haz constante $\mathbb{C}_X$.*

El siguiente resultado es al mismo tiempo "precursor" del teorema de constructibilidad de Kashiwara 15 y de la correspondencia de Riemann-Hilbert (teorema 19). La prueba es relativamente elemental y se puede encontrar en (cf. [157, 64]):

Proposición 12 *Dado un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente $\mathcal{M}$ no nulo, las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. $\operatorname{Ch}\mathcal{M} = T^*_X X$ *(la sección nula del cotangente).*
2. $\mathcal{M}$ *es un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente.*
3. $\mathcal{M}$ *es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango (r) finito*[10].

Si además X es una variedad analítica compleja lisa, entonces las propiedades anteriores son también equivalentes a:

4. *Si $\mathcal{L}$ denota el haz de las* secciones horizontales *de $\mathcal{M}$, i.e. aquéllas que son anuladas por los campos de vectores, o de forma equivalente, $\mathcal{L} = \ker\nabla = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$, donde $\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ es la conexión integrable que determina la estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo sobre $\mathcal{M}$ (ver ejemplo 3, 3.), entonces se tiene:*
   - *-) $\mathcal{L}$ es un haz localmente constante de espacios vectoriales complejos de dimensión (r) finita.*
   - *-) El morfismo canónico de $\mathcal{D}_X$-módulos $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X \to \mathcal{M}$ es un isomorfismo.*
5. *Existe un haz localmente constante $\mathcal{L}$ de espacios vectoriales complejos de dimensión (r) finita tal que $\mathcal{M}$ es isomorfo como $\mathcal{D}_X$-módulo a $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X$.*

La equivalencia entre las tres primeras propiedades es puramente algebraica, mientras que la equivalencia con las dos últimas es una relectura del teorema de Cauchy-Frobenius cf. [157].

Notaremos por $\operatorname{Coint}(X)$ la subcategoría plena de $\operatorname{Mod}(\mathcal{D}_X)$ formada por los $\mathcal{D}_X$-módulos coherentes cuya variedad característica está contenida en la sección nula del fibrado cotangente, o de forma equivalente y de acuerdo con la proposición anterior, aquellos $\mathcal{D}_X$-módulos que son $\mathcal{O}_X$-coherentes, o incluso $\mathcal{O}_X$-localmente libres de rango finito. La categoría $\operatorname{Coint}(X)$ es pues una subcategoría abeliana plena de $\operatorname{Hol}(X)$ que es estable por extensiones.

[10] En un lenguaje más geométrico, esto quiere decir $\mathcal{M}$ es el haz de secciones de un fibrado vectorial dotado de una conexión integrable.

También notaremos, en el caso analítico complejo, por $\mathrm{Loc}(X)$ la subcategoría abeliana plena de $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$ formada por los haces localmente constantes de espacios vectoriales complejos de dimensión finita. Dicha categoría también es estable por extensiones cf. [142].

Ejemplo 13 *Supongamos que X es una variedad analítica compleja lisa y sea $\mathcal{E}$ un objeto de* $\mathrm{Coint}(X)$. *El teorema de Cauchy-Frobenius y la proposición 12 nos aseguran que el complejo de de Rham $DR(\mathcal{E})$ está concentrado en grado 0, su haz de* 0*-cohomología $\mathcal{L} = DR^0(\mathcal{E}) = h^0\,DR(\mathcal{E})$ es un haz localmente constante de espacios vectoriales de dimensión finita, y que el morfismo canónico $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ es un isomorfismo $\mathcal{D}_X$-módulos. Estas propiedades se pueden resumir en el hecho de que los funtores:*

$$DR^0 : \mathrm{Coint}(X) \longrightarrow \mathrm{Loc}(X), \quad - \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X : \mathrm{Loc}(X) \longrightarrow \mathrm{Coint}(X)$$

son casi-inversos el uno del otro.

2.4 El teorema de constructibilidad de Kashiwara

Uno de los resultados fundamentales de la teoría de los módulos holónomos sobre una variedad analítica compleja es el *teorema de constructibilidad* de Kashiwara [82], que traduce la propiedad de holonomía sobre un $\mathcal{D}_X$-módulo en una propiedad de finitud sobre su complejo de soluciones (y su complejo de de Rham), generalizando así el clásico teorema de Cauchy. Comencemos por recordar la definición de esta propiedad.

Definición 14 *(cf. [178]) Sea X una variedad analítica compleja lisa, o más generalmente un espacio analítico complejo arbitrario, y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales sobre X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un haz* (analíticamente) constructible *si existe una estratificación analítica $X = \cup X_i$ (cf. [145]) tal que la restricción de $\mathcal{F}$ a cada estrato X_i es un haz localmente constante de espacios vectoriales de dimensión finita. Más generalmente diremos que un complejo $\mathcal{F}$ de haces de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales sobre X es constructibles si cada objeto de cohomología $h^i(\mathcal{F})$ es constructible.*

El lector puede encontrar un resumen de los resultados básicos de los haces y complejos constructibles en [178] (ver también [82, 142]).

Teorema 15 *[82] Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo (a la izquierda) holónomo sobre una variedad analítica compleja lisa X, entonces su complejo de soluciones $Sol\,\mathcal{M}$ es un complejo constructible acotado (en grados* $[0, \dim X]$*), que además verifica la* condición de soporte

$$\dim \mathrm{sop}\, h^i\, Sol\,\mathcal{M} \leq \dim X - i, \quad \forall i \geq 0.$$

Aunque no lo hemos mencionado antes, existe un funtor “dualidad” entre los módulos holónomos, $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^\star$, que es involutivo ($\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^{\star\star}$) y que establece una antiequivalencia de $\mathrm{Hol}(X)$ en sí misma para la que se tiene un isomorfismo (en la categoría derivada) natural $DR\,\mathcal{M} \simeq Sol\,\mathcal{M}^\star$ (cf. [82, 134]). Como consecuencia, el teorema de constructibilidad admite una formulación equivalente si sustituimos el complejo de soluciones $Sol\,\mathcal{M}$ por el complejo de de Rham $DR\,\mathcal{M}$.

La prueba original de Kashiwara del teorema anterior se basa en algunos resultados relativamente complejos sobre la propagación de soluciones de ciertos SELDP elípticos.

Existe otra prueba [139, 142] más geométrica dentro del espíritu de la Geometría Algebraica. Dicha prueba utiliza las operaciones sobre los módulos holónomos (imágenes directas, complejo de de Rham relativo) y el teorema de coherencia de las imágenes directas de los $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes por un morfismo proyectivo.

Dado un $\mathcal{D}$-módulo holónomo $\mathcal{M}$, el teorema de constructibilidad de Kashiwara da sentido a su *característica de Euler-Poincaré* en cada punto $p \in X$:

$$\chi_p(\mathcal{M}) := \sum_i (-1)^i \dim h^i(Sol\,\mathcal{M})_p = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_{X,p}}(\mathcal{M}_p, \mathcal{O}_{X,p}).$$

En el caso en que $\mathcal{M}$ provenga de una sola ecuación ordinaria $P = a_m\partial^m + \cdots + a_0$, $a_m \neq 0$, en dimensión 1 (X es por ejemplo un disco de $\mathbb{C}$ centrado en el origen), el teorema del índice de Komatsu-Malgrange [93], [114] afirma que la característica de Euler-Poincaré de $\mathcal{M}$ en 0, i.e. $\chi_0(\mathcal{M}) = \dim\ker P_0 - \dim\operatorname{coker} P_0$, coincide con el número $m - \mathrm{val}_0(a_m)$.

Una vez definidas las multiplicidades algebraicas de las componentes de la varidedad característica de los $\mathcal{D}$-módulos coherentes (cf. [120]), i.e. el *ciclo característico*, el teorema del índice de Komatsu-Malgrange se generaliza a la dimensión superior a través de determinados invariantes geométricos de las estratificaciones, que resultan expresarse en función de las *obstrucciones de Euler* de los estratos [81], [85], [28], [50].

El interés de las fórmulas de índice anteriores radica en la igualdad de dos términos de naturaleza completamente distinta: uno de los términos, el de las características de Euler-Poincaré de los complejos de soluciones, es trascendente en el sentido de que su estimación a priori pasa por la resolución de sistemas de ELDP, mientras que el otro término está formado por invariantes geométricos de las estratificaciones en juego (obstrucción de Euler) y por invariantes algebraicos de nuestros SELDP (multiplicidades).

2.5 El polinomio de Bernstein-Sato

En la década de los (19)50, varias escuelas importantes de matemáticos se ocupaban del problema de la existencia de soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes. Este problema estaba inmerso en la entonces floreciente *Teoría de las Distribuciones* de L. Schwartz. Concretamente se trataba de lo siguiente: Dado un operador diferencial del tipo $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{x}^\alpha}$ con coeficientes a_α constantes (reales o complejos), se trataba de analizar la existencia de distribuciones $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ verificando la ecuación

$$P(T) = \delta, \tag{8}$$

donde δ representa la distribución de Dirac con masa en el origen de coordenadas. Las posibles soluciones de (8) se denominan *soluciones fundamentales* de P. El interés de tal cuestión radica en que, mediante la convolución, se podría deducir la existencia de soluciones para ecuaciones con un segundo miembro arbitrario[11].

Aplicando la *transformación de Fourier*, y limitando por tanto la búsqueda de nuestras soluciones fundamentales al espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de las *distribuciones temperadas*, la ecuación (8) se transforma en $\widehat{P} \cdot \widehat{T} = 1$, donde $\widehat{P} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \underline{\xi}^\alpha$ es simplemente un polinomio con coeficientes reales o complejos. Este es el llamado problema de la *división de distribuciones*, de Schwartz. Se trata pues de, dado un polinomio $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ no nulo, encontar una distribución (temperada) $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$F \cdot U = 1. \tag{9}$$

Considerando el polinomio $F\overline{F} = |F|^2$, podemos reducirnos al caso de un polinomio que no tome valores negativos en $\mathbb{R}^n$, lo cual supondremos de ahora en adelante. Evidentemente, todo el problema está en las singularidades de la hipersuperficie $F = 0$. Por ejemplo, si trabajamos en una variable y $F = \xi_1^2$, entonces la distribución U que buscamos es la llamada *valor principal* de $1/\xi_1^2$, que viene definida por

$$Vp(\frac{1}{\xi_1^2})(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{-\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right],$$

para cada función test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

El problema de la existencia de soluciones fundamentales para operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, fue primeramente resuelto por B. Malgrange y L. Ehrenpreis, a "golpes de ϵ y δ" (ver [112], [55]). El problema de la división de distribuciones por polinomios fue resuelto por L. Hörmander y S. Lojasiewicz (ver [77], [104]).

En el Congreso Internacional de Matemáticas de Amsterdam de 1954, I.S. Gel'fand propone el problema de la prolongación analítica de la función con valores en el espacio de las distribuciones

$$\Phi\colon s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\} \mapsto F^s \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \tag{10}$$

donde F sigue siendo un polinomio como antes. De hecho, como para cada $s \in \mathbb{C}$, con $\Re s > 0$, F^s es una función continua con crecimiento polinomial (lento) en el infinito, podemos considerar la función (débilmente=fuertemente) analítica

$$\Phi\colon \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

[11] Notemos que esta reducción es puramente formal, o si se quiere, puramente algebraica.

con valores en el espacio de las distribuciones temperadas.

La posibilidad de una prolongación de Φ a una función meromorfa $\widetilde{\Phi}$ en $\mathbb{C}$ permitiría concluir de manera puramente algebraica. Para ello observamos que $\lim_{s\to 0}\Phi(s) = 1$, de donde $\widetilde{\Phi}$ no tendría polo en $s = 0$ y además tomaría el valor 1 (la función constante 1). Considerando el desarrollo de Laurent en el entorno de $s = -1$

$$\widetilde{\Phi}(s) = \sum_{k=-l}^{+\infty} (s+1)^k U_k,$$

con U_k distribución temperada para cada $k \geq -l$, y teniendo en cuenta que $F\widetilde{\Phi}(s) = \widetilde{\Phi}(s+1)$, deducimos que el desarrollo en serie de potencias de $\widetilde{\Phi}$ en el entorno de $t = 0$ es

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sum_{k=-l}^{+\infty} t^k (FU_k) \quad (t = s+1),$$

de donde $FU_{-l} = \cdots = FU_{-1} = 0$ y $FU_0 = \widetilde{\Phi}(0) = 1$, con lo que U_0 sería la distribución (temperada) que buscamos.

El problema de la prolongación analítica de F^s fue resuelto por I.N. Bernstein y S.I. Gel'fand por vía analítica en [9]. En [4] se da otra prueba geométrica basada en la *Resolución de Singularidades* de Hironaka [76].

Pero no es ésta la única forma en la que el Algebra y la Geometría Algebraica se ven envueltas en el problema de la división de distribuciones.

I.N. Bernstein observó que la existencia de una relación funcional del tipo

$$b(s)F^s = Q(s)F^{s+1}, \qquad \forall s \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

donde $b(s)$ es un polinomio no nulo con coeficientes complejos y $Q(s)$ es un operador diferencial del anillo $\mathbb{C}[s,\xi_1,\ldots,\xi_n,\partial/\partial\xi_1,\ldots,\partial/\partial\xi_n]$, resolvía la cuestión, pues para prolongar la función de (11) era suficiente aplicar la relación (12) y avanzar por franjas de $\mathbb{C}$ del tipo $-n < \Re s \leq -n+1$, logrando así una prolongación meromorfa con polos contenidos en los trasladados por enteros negativos o nulos de las raíces del polinomio $b(s)$. A un polinomio $b(s)$ como el anterior de grado mínimo, se le llama *polinomio de Bernstein-Sato* de F.

La observación fundamental de Bernstein es aún más sorprendente si se analiza la prueba que da de la existencia de dicha relación funcional en [10]. Se trata de una técnica puramente algebraica, donde la no conmutatividad del anillo de los operadores diferenciales se "combate" con el paso al graduado, y una vez allí todo es cuestión de utilizar el familiar polinomio de Hilbert-Samuel de la Geometría Algebraica y del Algebra Conmutativa.

El lector podrá encontrar una clara exposición de la prueba de Bernstein en [42] (ver también [154]).

El caso de las series formales o convergentes fue tratado en [16, 17] y más tarde en [83, 84] en el marco de los módulos holónomos sobre una variedad analítica compleja lisa. En [141] se puede encontrar un prueba unificada de la existencia de la ecuación funcional de Bernstein en todos los casos anteriores, así como en el caso de las variedades analíticas rígidas (álgebras de Tate) y los esquemas formales y débilmente formales que aparecen en la cohomología p-ádica.

Antes de abandonar este comentario-introducción al polinomio de Bernstein-Sato, vamos a exponer dos situaciones donde aparece como protagonista.

2.5.1 Finitud de las localizaciones

Sea k un cuerpo de característica cero, $A = k[x_1, \ldots, x_d]$ el anillo de polinomios en d variables con coeficientes en k y $f \in A$ un polinomio no constante. Es bien fácil y conocido comprobar que la localización $A_f = \{\frac{a}{f^m} \mid a \in A, m \geq 0\}$ no es un módulo de tipo finito sobre el anillo A. Ahora bien, sabemos que A tiene una estructura natural de D-módulo a la izquierda, donde $D = A[\partial_1, \ldots, \partial_d]$ es el anillo de los O.D.L. con coeficientes en A. Tal como vimos en la primera sección, la "evaluación en el polinomio 1" nos proporciona un epimorfismo D-lineal a la izquierda del propio anillo D en el D-módulo A, lo que hace que podamos ver A como el cociente de D por el ideal a la izquierda generado por las derivadas parciales ∂_i y, en particular, A será un D-módulo finitamente generado, incluso monógeno. La estructura de D-módulo se transfiere naturalmente a la localización A_f: al derivar una fracción cuyo denominador es una potencia de f obtenemos una nueva fracción del mismo tipo. La existencia de la relación funcional (12) nos garantiza que A_f estará generado como D-módulo por la potencia f^{s_0}, donde s_0 es la menor raíz entera del polinomio de Bernstein-Sato $b(s)$, pues obviamente las potencias f^s con $s \geq s_0$ se expresan como $f^s = f^{s-s_0} \cdot f^{s_0}$ y las potencias f^s con $s < s_0$ se expresan como

$$f^s = \frac{P(s) \cdots P(s+1) \cdots P(s_0 - 1) \cdot f^{s_0}}{b(s)b(s+1) \cdots b(s_0 - 1)}.$$

Por tanto, la localización A_f, a pesar de no ser finitamente generado como A-módulo sí lo es como D-módulo. De hecho, se prueba también que A_f es holónomo en en sentido de la definición 5.

En el caso de las variedades algebraicas, la localización antes expuesta es la contrapartida de la imagen directa (para la topología de Zariski) por la inmersión abierta asociada al complementario de la hipersuperficie $f = 0$. Más concretamente, si $Y \subset X$ es una hipersuperficie arbitraria de una variedad algebraica lisa X sobre un cuerpo k de característica 0 y $j : U = X - Y \hookrightarrow X$ designa la inmersión del abierto complementario, entonces el haz $j_*\mathcal{O}_U$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo casi coherente pero no coherente. Sin embargo, el haz $j_*\mathcal{O}_U$ posee una estructura natural de $\mathcal{D}_X$-módulo, inducida por la de $j_*j^{-1}\mathcal{D}_X$-módulo, para la cual la teoría del polinomio de Bernstein nos asegura la coherencia y la holonomía (cf. [134]).

En el caso analítico complejo este mismo resultado no es cierto, pues la imagen directa por j para la topología trascendente introduce singularidades esenciales. Puede darse sin embargo una variante, en la que en lugar de tomar $j_*\mathcal{O}_U$, tomamos la imagen directa "moderada" o localización algebraica $\mathcal{O}_X[\star Y]$, formada por las funciones meromorfas con polos a lo largo de Y. Este haz tiene una estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo obvia, para la cual de nuevo la teoría del polinomio de Bernstein nos asegura la coherencia y la holonomía [83] (Una prueba de este hecho basada en la existencia de la relación funcional de Bernstein sobre las álgebras de funciones holomorfas sobre policilindros compactos se encuentra en [134, 141]).

Todo lo dicho anteriormente tiene sentido para un $\mathcal{D}_X$-módulo arbitrario en lugar de $\mathcal{O}_X$: si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo (a la izquierda) e $Y \subset X$ es una hipersuperficie, el *localizado de* $\mathcal{M}$ *a lo largo de* Y [67] , notado $\mathcal{M}[\star Y]$, hereda una estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo [122, 123, 84]: si $f = 0$ es una ecuación local de Y, las secciones locales de $\mathcal{M}[\star Y]$ son fracciones de la forma $\frac{m}{f^r}$, donde m essección local de $\mathcal{M}$ y $r \geq 0$. Los O.D.L. actúan sobre estas fracciones mediante las reglas habituales del Cálculo Diferencial.

De hecho, cuando Y es una subvariedad algebraica o subespacio analítico arbitrario de X, podemos extender la construcción precedente para obtener, no un solo $\mathcal{D}_X$-módulo, sino un complejo de $\mathcal{D}_X$-módulos (objeto de la categoría derivada), notado $R\,\mathcal{M}[\star Y]$. Este complejo aparece en un triángulo distinguido $R\,\Gamma_{[Y]}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow R\,\mathcal{M}[\star Y] \xrightarrow{+1}$, cuyo primer témino es la *cohomología local algebraica con soporte en* Y (cf. [134]).

En el caso en que Y es una hipersuperficie, el complejo $R\,\mathcal{M}[\star Y]$ está concentrado en grado 0 y su 0-cohomología, $R^0\,\mathcal{M}[\star Y]$, coincide con $\mathcal{M}[\star Y]$. Si X es una variedad algebraica lisa y si $j : U \hookrightarrow X$ designa la inclusión del abierto complementario de Y, se tiene una identificción entre los $\mathcal{D}_X$-módulos $\mathcal{M}[\star Y]$ y $j_* j^{-1}\mathcal{M}$. Si X es una variedad analítica compleja lisa, se tiene una inclusión estricta $\mathcal{M}[\star Y] \subset j_* j^{-1}\mathcal{M}$.

El resultado principal que resume las propiedades de la finitud de la localización de los $\mathcal{D}_X$-módulos es el siguiente teorema, debido a Bernstein en el caso algebraico [10] y a Kashiwara en el caso analítico complejo [83, 84] (ver también [134] y [141] para generalizaciones a otros contextos).

Teorema 16 *Si* $\mathcal{M}$ *et un* $\mathcal{D}_X$*-módulo holónomo e* $Y \subset X$ *es un subespacio analítico complejo o una subvariedad algebraica, dependiendo de los casos, entonces el complejo* $R\,\mathcal{M}[\star Y]$ *tiene cohomología holónoma. En particular, si* Y *es una hipersuperficie, el* D_X*-módulo* $\mathcal{M}[\star Y]$ *es holónomo.*

La prueba del teorema anterior se reduce al caso de las hipersuperficies mediante una sucesión de Mayer-Vietoris, y después a la teoría del polinomio Bernstein-Sato [10, 83, 84] (ver también [17, 54, 134, 141, 64]).

De esta forma la ecuación funcional de Bernstein-Sato aparece como el ingrediente realmente nuevo de la teoría de los $\mathcal{D}_X$-módulos con respecto al formalismo de la Geometría Algebraica y de la Geometría Analítica.

2.5.2 El polinomio de Bernstein-Sato y la topología de las singularidades de hipersuperficies complejas

Si $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^{d+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ es el germen de una función holomorfa no constante, podemos considerar la singularidad de hipersuperficie que define: $(Y = \{\boldsymbol{f} = 0\}, 0)$, cuyo anillo local será $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_{d+1}\}/(\boldsymbol{f})$.

La Teoría de Singularidades se ocupa del estudio (local) de tales gérmenes, ya sea a través de la topología local del complementario $(\mathbb{C}^{d+1},0) - (Y,0)$ o a través de las propiedades algebraicas del anillo $\mathcal{O}$. Un resultado básico de Milnor [147] afirma que, si $\boldsymbol{f}$ tiene un punto crítico aislado en el origen, entonces existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que $\boldsymbol{f}$ posee un representante f definido en la bola B_{ϵ_0} de radio ϵ_0 y centro el origen de $\mathbb{C}^{d+1}$, y tal que para cada $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ existe un $\eta > 0$ verificando que para cada $t \in \mathbb{C}$ con $|t| < \eta$, la fibra $f^{-1}(t)$ corta transversalmente a la esfera S_ϵ. En particular, y en virtud del lema de Ehresman (cf. [181]) la aplicación $f|_{\overline{B}_\epsilon \cap f^{-1}(D^*_\eta)}\colon B_\epsilon \cap f^{-1}(D^*_\eta) \to D^*_\eta$ es una fibración C^∞ localmente trivial, que es trivial sobre el borde $S_\epsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$.

Además, el tipo topológico de dicha fibración es independiente del $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ (y del η) tomado, y depende exclusivamente del germen de partida. Tiene sentido pues hablar de “la fibra genérica” de una cualquiera de dichas fibraciones, a la que nos referiremos como *fibra de Milnor* del germen $\boldsymbol{f}$.

Milnor demuestra también que la fibra de Milnor F de $\boldsymbol{f}$ tiene el tipo de homotopía de un ramillete de μ esferas reales n-dimensionales $\mu = \operatorname{rg} H^n(F,\mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{C}} H^n(F,\mathbb{C})$, y el entero μ puede interpretarse algebraicamente como la dimensión del espacio vectorial complejo (finito dimensional) que se obtiene al formar el cociente de $\mathcal{O}$ por el ideal jacobiano de $\boldsymbol{f}$. Dicho entero se denomina *número de Milnor* de $\boldsymbol{f}$, y es capaz por de pronto de detectar la presencia de singularidades: Y es singular en 0 si y sólo si $\mu > 1$.

Pero en este contexto aparecen otros invariantes más sofisticados. Dado que F es la fibra genérica de una fibración C^∞ localmente trivial sobre una circunferencia, dicha fibración está determinada por la propia F y por un difeomorfismo “característico” $T\colon F \to F$. Este difeomeorfismo característico induce un automorfismo de “monodromía”

$$H^n(T,\mathbb{C})\colon H^n(F,\mathbb{C}) \to H^n(F,\mathbb{C}),$$

que nos proporciona a su vez todo un conjunto de invariantes: sus valores propios, o si se quiere, su forma de Jordan. Una cuestión relevante a principios de los 70 fue la descripción algebraica de dichos invariantes, así como el estudio de sus propiedades. Lo primero que se probó es que se trataba de raíces de la unidad (este es el llamado teorema de la monodromía [25]). Pero el resultado más llamativo para nosotros es precisamente el resultado de Malgrange [115, 116] que comentamos seguidamente.

Notemos por $b_{\boldsymbol{f}}(s) \in \mathbb{C}[s]$ el polinomio de Bernstein-Sato del germen (serie convergente) $\boldsymbol{f}$. El teorema de Malgrange afirma que un número complejo σ anula a $b_{\boldsymbol{f}}(s)$ si y sólo si $e^{2\pi i\sigma}$ es un valor propio de la monodromía $H^n(T,\mathbb{C})$. En particular, y como concecuencia del teorema de Brieskorn [25], el polinomio de Bernstein-Sato de $\boldsymbol{f}$ tiene todas sus raíces racionales. Más tarde Kashiwara [83] extendió este resultado al caso de gérmenes con singularidades no necesariamente aisladas usando la resolución de singularidades de Hironaka.

3 Los teoremas de dualidad discreta y de dualidad continua

Sea X una variedad analítica compleja lisa con base numerable de dimensión pura igual a d, y notemos ω_X el haz inversible de las d-formas diferenciales. Para cada haz localmente libre $\mathcal{E}$ sobre X (i.e., haz de secciones holomorfas de un fibrado vectorial), es posible dotar de una topología Q.F.S.[12] (resp. Q.D.F.S.[13]) canónica a los espacios de cohomología $H^i(X,\mathcal{E})$ (resp. $H_c^{d-i}(X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}^*)$), de manera que la forma bilineal obtenida al componer el morfismo de Yoneda $H^i(X,\mathcal{E})\times H_c^{d-i}(X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}^*)\to H_c^d(X,\omega_X)$ con el morfismo traza (dado por la integración de (d,d)-formas con soporte compacto) $\int : H_c^d(X,\omega_X)\to\mathbb{C}$, induce una dualidad topológica perfecta entre los separados asociados. En el caso en que la variedad X sea compacta, los espacios de cohomología en juego son de dimensión finita [33] y las topologías naturales son separadas, obteniendo así una identificación canónica entre el espacio $H^i(X,\mathcal{E})$ y el dual algebraico del espacio $H_c^{d-i}(X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}^*)$. Todo ésto es lo que nos asegura la dualidad de Serre [171].

Es posible generalizar lo anterior al caso en que el haz $\mathcal{E}$ no sea localmente libre, sino tan sólo $\mathcal{O}_X$-coherente. Es cuestión de reemplazar los espacios $H_c^{d-i}(X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}^*)$ por $\mathrm{Ext}^{d-i}_{\mathcal{O}_X,c}(\mathcal{E},\omega_X)$. Se trata del resultado de Malgrange [113] (ver también [174]).

Es posible incluso generalizar lo anterior al caso en que X sea un espacio analítico singular, para lo que hay que comenzar por encontrar un sustituto de ω_X. En el caso general, dicho sustituto no es un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos, sino un complejo K_X de $\mathcal{O}_X$-módulos, llamado *complejo dualizante* (ver [161]).

Hasta ahora nos hemos ocupado de la dualidad "continua" sobre los haces coherentes en un espacio analítico complejo. Disponemos también de una dualidad "continua" sobre los haces coherentes en una variedad algebraica completa sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Es la llamada dualidad de Serre-Grothendieck. En el caso liso, esta dualidad adquiere una forma idéntica al caso de las variedades analíticas complejas compactas (cf. [74, chap. III, §7]).

Pasemos ahora a hablar de la dualidad "discreta". Comenzamos por la dualidad de Poincaré. Sea M una variedad C^∞ orientable (y orientada) con base numerable de dimensión pura real igual a d. Sea $\mathcal{L}$ un sistema local[14] de espacios vectoriales complejos de dimensión finita sobre M. Consideremos la forma bilineal $H^i(M,\mathcal{L})\times H_c^{d-i}(M,\mathcal{L}^\vee)\to\mathbb{C}$ obtenida al componer el morfismo de Yoneda correspondiente con el morfismo traza $\int : H_c^d(M,\mathbb{C}_M)\to\mathbb{C}$, dado por la integración de d-formas con

[12] Cociente de un espacio localmente convexo Fréchet Schwartz.
[13] Cociente del dual fuerte de un F.S..
[14] Haz localmente constante.

soporte compacto. La dualidad de Poincaré-De Rham [162] nos asegura que la forma bilineal anterior identifica el espacio $H^i(M,\mathcal{L})$ con el dual algebraico de $H_c^{d-i}(M,\mathcal{L}^\vee)$.

Es posible generalizar este último resultado al caso de espacios localmente compactos de "dimensión finita" y de haces $\mathcal{L}$ arbitrarios de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, o más aún, de módulos sobre un anillo noetheriano regular. Se trata de la dualidad de Poincaré-Grothendieck-Verdier [177]. En este caso también es necesario construir un complejo dualizante (o de orientación). Curiosamente esta generalización, aun tratando de objetos "clásicos", como son los espacios localmente compactos y los haces sobre ellos, fue inspirada, y casi calcada, por la dualidad de Grothendieck sobre los haces ℓ-ádicos constructibles [1, 78], que fue desarrollada con anterioridad.

Una vez que hemos pasado revista a la dualidad "continua" de Serre-Malgrange-Grothendieck-Ramis-Ruget y a la dualidad "discreta" de Poincaré-De Rham-Grothendieck-Verdier, y que hemos constatado la analogía formal de que gozan[15], vamos a ver cómo la teoría de los $\mathcal{D}$-módulos [124, 130] sobre una variedad analítica compleja lisa permite englobarlas.

Volvamos pues al caso en que X es una variedad analítica compleja lisa de dimensión compleja pura d, y por tanto de dimensión real $2d$.

Dado un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente $\mathcal{M}$, o mejor, un complejo acotado de $\mathcal{D}_X$-módulos con cohomología $\mathcal{D}_X$-coherente $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, pongamos

$$\mathbb{E}^i(\boldsymbol{\mathcal{M}}) := R^i\,\Gamma(X, Sol(\boldsymbol{\mathcal{M}})) = \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_X)$$
$$\mathbb{E}^c_i(\boldsymbol{\mathcal{M}}) := R^{2d-i}\,\Gamma_c(X, DR(\boldsymbol{\mathcal{M}})) = \operatorname{Ext}^{2d-i}_{\mathcal{D}_X,c}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{\mathcal{M}}),$$

y consideremos la forma bilineal $\mathbb{E}^c_i(\boldsymbol{\mathcal{M}}) \times \mathbb{E}^i(\boldsymbol{\mathcal{M}}) \to \mathbb{E}^c_0(\mathcal{O}_X)$ que se obtiene al componer el morfismo de Yoneda con el morfismo traza, composición que es posible dado que se tiene $\mathbb{E}^c_0(\mathcal{O}_X) = H^{2d}_c(X, \mathbb{C}_X)$ de acuerdo con el lema de Poincaré.

Los resultados de Z. Mebkhout [124, 130] nos dicen que es posible dotar a los espacios $\mathbb{E}^i(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ y $\mathbb{E}^c_i(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ de unas topologías naturales Q.F.S. y Q.D.F.S. respectivamente, de manera que la forma bilineal anterior induce una dualidad topológica perfecta entre los separados asociados.

Hasta aquí, no hay gran cosa nueva, sino tan sólo otro enunciado formalmente análogo a los que ya teníamos. Ahora bien, si $\mathcal{E}$ es un haz $\mathcal{O}_X$-coherente, podemos considerar el complejo (acotado con cohomología $\mathcal{D}_X$-coherente) $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathcal{E}} := \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$. Pues bien, se tienen unos isomorfismos canónicos

$$\mathbb{E}^i(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathcal{E}}) \simeq H^i(X, \mathcal{E}), \quad \mathbb{E}^c_i(\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathcal{E}}) \simeq \operatorname{Ext}^{d-i}_{\mathcal{O}_X,c}(\mathcal{E}, \omega_X)$$

de manera que la dualidad de Mebkhout nos permite obtener como caso particular la de Serre-Malgrange. Nótese que en el caso particular en que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, el complejo $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathcal{E}}$ se indentifica al propio $\mathcal{D}_X$.

[15] De hecho dicha analogía no aparece exclusivamente en los enunciados, sino también en las pruebas, pues en el caso de la primera se utilizan las resoluciones de Dolbeault y de Grothendieck, mientras que en la segunda se utilizan las de Poincaré y de De Rham, todas ellas del tipo formas-corrientes.

Supongamos ahora que $\mathcal{L}$ es un sistema local de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita sobre X, y consideremos el $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X$. Se trata de un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre dotado de una estructura de $\mathcal{D}_X$-módulo, i.e una conexión integrable (ver prop. 12 y ej. 13). Se tienen unos isomorfismos canónicos

$$\mathbb{E}^i(\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X) \simeq H^i(X, \mathcal{L}), \quad \mathbb{E}_i^c(\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X) \simeq H_c^{2d-i}(X, \mathcal{L}^\vee)$$

de manera que la dualidad de Mebkhout nos permite también obtener la dualidad de Poincaré-De Rham. Además, estos dos casos particulares de la dualidad de Mebkhout aparecen como los dos casos límites de la misma, pues los $\mathcal{D}_X$-módulos del tipo $\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{O}_X$ tienen como variedad característica la sección nula del fibrado cotangente, siendo por tanto holónomos (dimensión mínima), mientras que la variedad característica de los $\mathcal{D}_X$-módulos del tipo $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ tiene dimensión igual a d más la dimensión del soporte de $\mathcal{E}$, pudiendo ésta llegar a ser máxima, es decir $2d$.

No tendría sentido esperar que la dualidad de Mebkhout pudiera englobar a la dualidad de Verdier para haces <u>arbitrarios</u> de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales sobre X. Ahora bien, dentro de los haces de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales sobre X hay un tipo, del que son un caso particular los sistemas locales, que posee un importante sentido geométrico. Se trata de los haces analíticamente constructibles (ver def. 14). Si pensamos un momento en lo que haría falta para obtener la dualidad de de Verdier-Grothendieck para un haz constructible $\mathcal{F}$ sobre X, a partir de la dualidad de Mebkhout, llegamos rápidamente a la conclusión de que necesitamos encontrar un complejo de $\mathcal{D}_X$-módulos con cohomología coherente $\mathcal{M}$ tal que

$$Sol(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}, \quad DR(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}^\vee = R\,Hom_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X).$$

Aquí está precisamente la motivación original de Mebkhout para lo que más tarde se convertiría de la llamada *dualidad local* [129] y el *problema de Riemann-Hilbert para los $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos* [125, 128, 132, 131], [87]. La primera de las relaciones anteriores trata de realizar todo haz constructible sobre X como las "soluciones" de un complejo de $\mathcal{D}_X$-módulos con cohomología coherente (y de hecho holónoma regular). Esto es lo que se ha venido en llamar el problema de Riemann-Hilbert. La segunda de las relaciones es de hecho una consecuencia de la primera, de acuerdo con el *teorema de dualidad local* de Mebkhout [125, 129]:

Teorema 17 *Para cada $\mathcal{D}_X$-módulo*[16] *holónomo $\mathcal{M}$ existe un isomorfismo natural:*

$$DR(\mathcal{M}) \simeq (Sol(\mathcal{M}))^\vee.$$

En [155] se da una prueba detallada del resultado de Mebkhout y se relaciona con la prueba (incompleta) de [89], 1.4.6.

Antes de pasar a comentar el problema de Riemann-Hilbert general, vamos a ver cómo el intento de realizar <u>ciertos</u> haces constructibles como soluciones de $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos, está íntimamente emparentado con el Teorema de Comparación

[16] El resultado es cierto para cada complejo acotado de $\mathcal{D}_X$-módulos con cohomología holónoma.

de Grothendieck, estableciendo así un puente entre la noción clásica de *punto singular regular* de una ecuación ordinaria (cf. [79]) y la noción de *regularidad* para los $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos.

4 El problema de Riemann-Hilbert para los $\mathcal{D}$ -módulos holónomos

4.1 Los teoremas de comparación de Grothendieck y Deligne

Sea X una variedad algebraica lisa sobre el cuerpo de los complejos, y notemos X^{an} la variedad analítica (lisa) compleja asociada y $\varphi\colon X^{an} \to X$ el morfismo natural. El funtor $\varphi^* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X^{an}})$ transforma haces coherentes (resp. casicoherentes) en haces coherentes (resp. límites inductivos de haces coherentes). Se tienen isomorfismos canónicos

$$\varphi^*(\Omega^i_X) \simeq \Omega^i_{X^{an}}, \quad i \geq 0. \tag{13}$$

Aunque el complejo de De Rham algebraico $\Omega^\bullet_X$ no es un complejo de $\mathcal{O}_X$-módulos, pues la diferencial no es $\mathcal{O}_X$-lineal, sin embargo sí disponemos de un morfismo canónico de complejos[17] con diferencial $\mathbb{C}$-lineal $\varphi^{-1}\Omega^\bullet_X \to \Omega^\bullet_{X^{an}}$, compatible con los isomorfismos (13), y que por tanto nos proporciona unos homomorfismos

$$H^i_{DR}(X) = R\,\Gamma(X, \Omega^\bullet_X) \to H^i_{DR}(X^{an}) \overset{\text{Poincaré}}{\simeq} H^i(X^{an}, \mathbb{C}), \tag{14}$$

entre la cohomología de De Rham algebraica de X y la cohomología singular de X^{an}.

En el caso en que X sea propia, los teoremas GAGA de Serre [172] nos dicen que los homomorfismos (14) son isomorfismos.

Analicemos ahora el método seguido por Grothendieck para tratar el caso general [67].

Podemos sumergir X en una compactificación de Hironaka-Nagata $\overline{X}$ como abierto denso. Sea $Y = \overline{X} - X$ el divisor del "infinito" con cruzamientos normales. Notemos $j\colon X \hookrightarrow \overline{X}$ la inmersión abierta[18]. Siguiendo el proceso anterior, podemos encontrar unos morfismos de complejos[19] $\varphi^{-1}j_*\Omega^\bullet_X \to \Omega^\bullet_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}] \hookrightarrow j^{an}_*\Omega^\bullet_{X^{an}}$ que inducen

[17] Este hecho descansa en que la diferencial exterior, al ser un operador diferencial en el sentido de [69, §16], puede ser linearizada mediante los haces de *partes principales* loc. cit. a los que sí podemos aplicar el funtor φ^*.

[18] Tanto j_* como $(j^{an})_*$ son funtores exactos sobre los módulos coherentes, pues Y e Y^{an} son hipersuperficies, y por tanto no es necesario derivarlos.

[19] La notación $[\star Y^{an}]$ significa "con polos a lo largo de Y^{an}.

otros homomorfismos

$$H^i_{DR}(X) \to R^i\,\Gamma(\overline{X}^{an}, \Omega^\bullet_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]) \to$$
$$\to R^i\,\Gamma(\overline{X}^{an}, j^{an}_* \Omega^\bullet_{X^{an}}) = \cdots = H^i(X^{an}, \mathbb{C}).$$

El primero de los morfismos de complejos es un casi-isomorfismo gracias a los teoremas GAGA de Serre (y pasando por un argumento de límite inductivo). Por tanto, el primer homomorfismo entre los espacios de cohomología es también un isomorfismo. Sólo queda pues, para concluir, que el segundo morfismo de complejos es también un casi-isomorfismo, lo cual es una cuestión local en el "infinito", que además, gracias a que Y posee cruzamientos normales, se trata de un cálculo elemental con series de Laurent.

Así pues, la comparación global entre las cohomologías de De Rham algebraica y analítica ha quedado reducida a una cuestión local, que además puede ser fácilmente enunciada en términos de los $\mathcal{D}$-módulos. Se tienen identificaciones canónicas

$$\Omega^\bullet_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}] \simeq DR(\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]), \quad j^{an}_* \Omega^\bullet_{X^{an}} \simeq R\, j^{an}_*\, DR(\mathcal{O}_{X^{an}}).$$

Desde el punto de vista de los $\mathcal{D}$-módulos, el problema es pues que el morfismo natural

$$\begin{aligned} DR(\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]) &\to R(j^{an})_*(j^{an})^{-1}\, DR(\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]) = \\ &= R(j^{an})_*\, DR(\mathcal{O}_{X^{an}}) = R(j^{an})_* \mathbb{C}_{X^{an}} \end{aligned} \tag{15}$$

es un casi-isomorfismo, o lo que es equivalente, que

$$DR(\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]/\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}) \simeq R\,\Gamma_{Y^{an}}(\mathbb{C}_{\overline{X}^{an}})[+1],$$

o incluso que $Sol(\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]/\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}) \simeq \mathbb{C}_{Y^{an}}[-1]$, $\quad Sol(\mathcal{O}_{\overline{X}^{an}}[\star Y^{an}]) \simeq (j^{an})_! \mathbb{C}_{X^{an}}$.

Usando la resolución de singularidades de Hironaka, se prueba que las relaciones anteriores son ciertas para cada hipersuperficie de una variedad analítica compleja, con independencia de que provenga de una variedad algebraica y de que tenga cruzamientos normales [67], [123, §3]. Dichas relaciones expresan la "regularidad" en el sentido de Mebkhout (ver def. 18) del haz estructural, visto como $\mathcal{D}$-módulo holónomo, a lo largo de la hipersuperficie en cuestión. Por otra parte, resuelve el problema de Riemann-Hilbert para el caso de los haces constructibles del tipo $(j^{an})_!(j^{an})^{-1}\mathbb{C}_{\overline{X}^{an}}$, donde j^{an} es la inmersión abierta del complementario de un divisor cualquiera Y^{an} de nuestra variedad analítica[20].

El caso del teorema de comparación de Deligne [44] puede ser tratado por el mismo procedimiento e interpretado dentro de la Teoría de los $\mathcal{D}$-módulos. El resultado de Deligne trata de, en lugar de considerar la conexión trivial sobre nuestra variedad algebraica de partida, considerar un fibrado $\mathcal{E}$ dotado de una conexión integrable arbitraria. El problema es ahora la comparación entre la cohomología de De Rham

[20] Todo ésto puede interpretarse como el "lema de Poincaré singular" para el citado divisor [126].

algebraica de $\mathcal{E}$ y la cohomología de De Rham analítica de $\mathcal{E}^{an}$. Ya en el caso de las curvas nos percatamos de que en general la respuesta a este problema de comparación es negativa. Depende de la "irregularidad" de nuestra conexión en los puntos del infinito. Esto lleva a Deligne a dar una definición en dimensión cualquiera de "regularidad", que no es otra que la que utiliza el propio teorema de comparación de Grothendieck, y lo que es más importante, se da también un criterio geométrico de regularidad (restricción a curvas).

4.2 La noción de regularidad para los $\mathcal{D}$-módulos holónomos

Motivado por las relaciones anteriores válidas para el haz estructural, Mebkhout introduce la siguiente noción[21] [123, 122, 125, 129] (ver también [159]) :

Definición 18 *Sea X una variedad analítica compleja lisa. Diremos que un complejo de $\mathcal{D}_X$-módulos con cohomología holónoma $\mathcal{M}$ es regular a lo largo de un subespacio analítico cerrado $Y \subset X$ si se verifican las propiedades equivalentes*[22] *siguientes:*

1. *El morfismo natural $DR(R\,\mathcal{M}[\star Y]) \to R\,j_* j^*\,DR\,\mathcal{M}$, es un isomorfismo (en la categoría derivada), donde $j : X - Y \hookrightarrow X$ es la inclusión.*
2. *El morfismo natural $j_! j^*\,Sol\,\mathcal{M} \to Sol(R\,\mathcal{M}[\star Y])$ es un isomorfismo (en la categoría derivada).*
3. *El morfismo natural $Sol(\mathcal{M})|_Y \to R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}})$ es un isomorfismo (en la categoría derivada), donde $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ designa el completado formal de $\mathcal{O}_X$ a lo largo de Y (cf. [5]).*

Diremos que $\mathcal{M}$ es regular si lo es a lo largo de cualquier subespacio analítico cerrado $Y \subset X$.

La propiedad 3. anterior es una generalización del resultado de Malgrange [114] que asegura que una ecuación diferencial ordinaria tiene un punto singular en el $0 \in \mathbb{C}$ si y sólo toda solución formal es convergente.

Con la ayuda de un sucesión de Mayer-Vietoris (cf. [134]) se comprueba que para que el complejo $\mathcal{M}$ sea regular es suficiente que lo sea a lo largo de cualquier <u>hipersuperficie</u> $Y \subset X$.

Los resultados de la sección anterior pueden por tanto resumirse afirmando que $\mathcal{O}_X$ es regular.

La categoría abeliana de los $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos regulares se nota por $\mathrm{Hol}_r(X)$.

[21]Existe otra noción [90] (ver también [89]) de "singularidades regulares" válida para los sistemas microdiferenciales, que resulta ser equivalente a la noción de Mebkhout sobre los sistemas diferenciales holónomos.

[22]La equivalencia de estas propiedades se basa en el teorema de dualidad local.

4.3 El problema de Riemann-Hilbert

Como ya hemos comentado con anterioridad, el problema de Riemann-Hilbert para los haces analíticamente constructibles trata de expresar un tal haz $\mathcal{F}$ sobre una variedad analítica compleja lisa X, como las "soluciones" de un $\mathcal{D}_X$-módulo coherente. Nótese que la denominación está completamente justificada. El problema clásico de Riemann trataba de realizar ciertas monodromías en el complementario de los puntos $0, 1, \infty$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ a través de las soluciones de ecuaciones diferenciales algebraicas con singularidades regulares en dichos puntos. Más tarde Hilbert generalizaba dicho problema, pero manteniendo absolutamente el principio de describir "objetos trascendentes" mediante "objetos algebraicos efectivos".

Lo primero que se observa es que podemos concentrar nuestra búsqueda entre los $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos, de acuerdo con el Teorema de Constructibilidad de Kashiwara. En segundo lugar, un solo $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo da lugar a todo un complejo de soluciones, que eso sí, de acuerdo con el teorema anterior, tiene cohomología analíticamente constructible. En el ejemplo del haz "prolongación por 0" $j_! j^{-1}\mathbb{C}_X$, donde j es la inmersión abierta del complementario de una hipersuperficie $Y \subset X$, analizado antes, el problema se resuleve de una manera relativamente simple. Encontramos un solo $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo $\mathcal{O}_X[\star Y]$ cuyas soluciones se identifican a $j_! j^{-1}\mathbb{C}_X$. Sin embargo, si hubiéramos partido de un subespacio analítico cualquiera $Y \subset X$, la respuesta no es tan fácil. En este caso necesitamos el complejo de $\mathcal{D}_X$-módulos $R\,\mathcal{O}_X[\star Y] := R\lim_{k\to\infty} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{O}_X)$ con cohomología holónoma, para obtener el isomorfismo deseado $Sol(R\,\mathcal{O}_X[\star Y]) \simeq j_! j^{-1}\mathbb{C}_X$. Por supuesto, en el caso en que Y sea una hipersuperficie el complejo anterior se indentifica al $\mathcal{D}_X$-módulo usual $\mathcal{O}_X[\star Y]$ de las funciones meromorfas con polos a lo largo de Y. Es más, si Y es una intersección completa local, dicho complejo se identifica "esencialmente" a un solo $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo, pues sólo posee cohomología no nula en un único grado.

Se pone así de manifiesto la necesidad de utilizar complejos de $\mathcal{D}_X$-módulos (con cohomología holónoma) para realizar los haces constructibles como "soluciones". Además, previamente ya sabíamos que un sólo $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo daba lugar a todo un complejo. Por tanto, el marco adecuado donde tratar el funtor "soluciones" (y lo mismo para el funtor "De Rham") es el de las categorías de los complejos correspondientes, donde las condiciones de finitud se fijan sobre los grupos de cohomología de los mismos. Este es justamente el meollo de las categorías derivadas y de los funtores derivados totales. Resumiendo, disponemos de los dos funtores $Sol\colon \mathrm{D}^b_h(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^b_{cons}(\mathbb{C}_X), DR\colon \mathrm{D}^b_h(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^b_{cons}(\mathbb{C}_X)$ que expresan de forma precisa la relación entre objetos continuos y objetos discretos, y que además están ligados por la dualidad de dos maneras distintas: $DR(\mathcal{M}^*) \simeq Sol(\mathcal{M}), DR(\mathcal{M}) \simeq (Sol(\mathcal{M}))^\vee$, donde * indica la dualidad algebraica sobre los $\mathcal{D}$-módulos (cf. [82, 134]) y $^\vee$ indica la dualidad topológica sobre los haces constructibles [178]. La primera de ellas es formal, mientras que la segunda es la llamada dualidad local de Mebkhout [129] aludida al final de la sección 3.

El problema de Riemann-Hilbert para los (complejos de) haces analíticamente constructibles se enuncia pues de la siguiente forma:

> ¿Son esencialmente sobreyectivos los funtores anteriores? Y en caso afirmativo, ¿puede aislarse una subcategoría de $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ de manera que dichos funtores induzcan equivalencias?

La respuesta a ambas preguntas, y en el contexto que estamos comentando, es conocida desde los años 1979/1980, y se encuentra en los trabajos [125, 128, 127, 132, 131], [87]. Dicha respuesta consiste en añadir como condición a nuestros complejos de $\mathcal{D}$-módulos la de ser *regulares* (def. 18).

De esta forma podemos considerar la categoría $\mathrm{D}^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ de los complejos acotados con cohomología holónoma regular (es lo mismo que decir que el complejo es regular, pues se prueba que un complejo es regulares si y sólo si sus cohomologías lo son), que es una subcategoría triangulada plena de $\mathrm{D}^b_h(\mathcal{D}_X)$, y el resultado final es la *correspondencia de Riemann-Hilbert* para los $\mathcal{D}$-módulos holónomos:

Teorema 19 *Sea X una variedad analítica compleja lisa. Los funtores*

$$Sol\colon \mathrm{D}^b_{hr}(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^b_{cons}(\mathbb{C}_X), \quad DR\colon \mathrm{D}^b_{hr}(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^b_{cons}(\mathbb{C}_X)$$

son equivalencias de categorías (trianguladas).

Una prueba directa y relativamente simple del teorema anterior en el caso de las variedades de dimensión 1 se encuentra en [152].

Una de las principales consecuencias de la resolución afirmativa del Problema de Riemann-Hilbert ha sido el descubrimiento de los *haces perversos.* Vamos a detenernos un instante en estos objetos.

4.4 Haces Perversos

Dado que los funtores *Sol* y *DR* son una equivalencia de categorías, y dado que la categoría $\mathrm{D}^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ contiene como subcategoría plena (estable por dualidad) a la categoría abeliana de los $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos regulares, su imagen esencial será también una subcategoría abeliana de $\mathrm{D}^b_{cons}(\mathbb{C}_X)$, pero distinta de la de los haces constructibles. Además, sus objetos tendrán carácter “local”, se podrán “pegar” como si de haces se tratara.

Paralelamente a este descubrimiento, M. Goresky y R. MacPherson estaban estudiando una variante de la (co)homología singular sobre espacios singulares, que admitiera, entre otras cosas, el formalismo de la dualidad de Poincaré. Esto se conseguía a base de considerar no todas las cadenas singulares, sino tan sólo aquellas que cortaran a una estratificación predefinida con unas condiciones determinadas, que los autores expresaban mediante las *funciones de perversidad.* Todo ésto era ya explícito en [61, 62], aunque quedaban algunas cuestiones importantes, como la independencia de la estratificación elegida. Por sugerencia de Deligne, y apoyándose en que 12 o 13 años antes, Grothendieck y Verdier habían mostrado cómo la dualidad de Poincaré se reducía a problemas de naturaleza local, estos autores cambiaron el enfoque original y construyeron un complejo cuya hipercohomología calculaba la cohomología de intersección que ellos habían introducido. De esta forma, Goresky y MacPherson escribieron el trabajo [63], en el cual definían dicho *complejo de intersección* IC_X para un espacio analítico complejo X. Como no podía ser menos, se trataba de un complejo acotado con cohomología constructible, canónicamente definido, y de carácter "local". Además era autodual, lo que explicaba el que la dualidad de Poincaré fuera satisfecha por la (co)homología de intersección. De hecho había algo más. Goresky y MacPherson describían una nueva operación, que permitía pasar de un complejo definido sobre un abierto de Zariski a otro definido sobre el total, y que gozaba de un buen comportamiento por la dualidad. Es la llamada *imagen directa intermedia*, notada habitualmente $j_{!*}$, y que también tenía un carácter local. El complejo de intersección aparecía como la imagen directa intermedia del haz constante sobre el abierto de puntos regulares de nuestro espacio. Así pues se trataba de un caso muy particular de otros complejos más generales, que por ejemplo aparecían de la siguiente forma. Si X es una variedad analítica lisa, $j : U \hookrightarrow X$ es una inmersión abierta de Zariski y $\mathcal{L}$ es un sistema local sobre U, podemos obtener un complejo no trivial considerando la imagen directa intermedia $j_{!*}(\mathcal{L})$. Disponíamos así de toda una familia de objetos de carácter local, distinta de la de los haces (constructibles) usuales, inmersa en una categoría derivada de carácter no local.

Pues bien, el milagro se produce una vez más y se observa que dichas prolongaciones intermedias proporcionan nuevos ejemplos de complejos pertenecientes a la imagen esencial, por los funtores *Sol* y *DR*, de la categoría de los $\mathcal{D}_X$-módulos holónomos regulares. Esto se lleva a cabo al caracterizar los complejos de dicha imagen esencial mediante las propiedades de "soporte" (ver teorema 15) y de "cosoporte"[129][23], y comprobar que las prolongaciones intermedias las satisfacían. De esta manera, dichas prolongaciones pertenecían a una subcategoría abeliana, esta vez de carácter local, de la categoría derivada de los complejos constructibles, y además, engendraban a todos sus objetos por extensiones finitas. Este hecho sirvió de base, de manera poco justificada a nuestro entender, para bautizar a dicha imagen esencial: sus objetos serían llamados a partir de ese momento *haces perversos.*

La definición formal queda pues como sigue:

Definición 20 *Un complejo constructible* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *sobre una variedad analítica compleja lisa* X *de dimensión* d *se denomina* haz perverso *si tanto él como su dual* $\boldsymbol{\mathcal{F}}^\vee$ *satisfacen las propiedades de soporte:* $\dim \operatorname{sop} h^i\boldsymbol{\mathcal{F}} \leq d - i, \dim \operatorname{sop} h^i\boldsymbol{\mathcal{F}}^\vee \leq d - i$, $\forall i = 0, \ldots, d$. *Si* $i : Y \hookrightarrow X$ *es una inmersión cerrada analítica de codimensión pura* r*, diremos que un complejo constructible* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *en* Y *es un haz perverso en* Y *si*

[23] Esta caracterización fue descubierta por Deligne, y pasa por la utilización del problema de Riemann-Hilbert para los complejos holónomos de $\mathcal{D}^\infty$-módulos de Mebkhout, y en particular de la bidualidad para éstos últimos (ver teorema 29, [26], [101, th. (4.6.3)]).

$i_*\boldsymbol{\mathcal{F}}[-r]$ *es un haz perverso de* X*. La subcategoría plena de* $\mathrm{D}^b_{cons}(\mathbb{C}_Y)$ *formada por los haces perversos se nota por* $\mathrm{Perv}(Y)$*.*

El resultado siguiente es pues un corolario del teorema 19 y de la caracterización de Deligne-Mebkhout:

Corolario 21 *Sea* X *una variedad analítica compleja lisa. Los funtores*

$$Sol\colon \mathrm{Hol}_r(X) \to \mathrm{Perv}(X), \quad DR\colon \mathrm{Hol}_r(X) \to \mathrm{Perv}(X)$$

son equivalencias de categorías (abelianas).

Con todos estos hechos consolidados, A.A. Beilinson, J. Bernstein y P. Deligne[24] escribieron la memoria [7], donde se acomete el estudio autónomo de las subcategorías abelianas plenas de las categorías derivadas (t-estructuras), así como la definición de los *haces perversos* sobre espacios estratificados generales, incluyendo el caso de la topología étale de los esquemas y la cohomología ℓ-ádica. Es justamente sobre este caso sobre el que el citado trabajo tiene sus mayores aportaciones, que podemos resumir en el hecho de que todo haz ℓ-ádico perverso mixto y simple sobre un esquema de tipo finito definido sobre un cuerpo finito, es puro[25]. Este hecho permite obtener una nueva prueba de los resultados fundamentales del trabajo [48].

Vemos así como la Teoría de los $\mathcal{D}$-módulos, de la mano en este caso de la (co)homología de intersección de Goresky-MacPherson, ha tenido una influencia indirecta, pero probablemente fundamental, en el desarrollo añadido de otro de los temas centrales de la escuela de Grothendieck.

Desde la década de los (19)80, una de las cuestiones que han suscitado más interés dentro de la teoría de los haces perversos ha sido su descripción explícita, ya sea en términos de diagramas de espacios vectoriales o por cualquier otro medio que permita realizar cálculos de manera efectiva. Los trabajos [43], [65], [57], [149], [150], [59], [105], [107], [108], [151], [106], [153], [58], [20], [158] entre otros, contienen aportaciones en este sentido.

En la tesis [71] se desarrolla el punto de vista de [153] en el contexto general del "pegamiento" de t-estructuras.

4.5 El complejo de irregularidad de Mebkhout

Dado un $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo $\mathcal{M}$ y una hipersuperficie $Y \subset X$, la obstrucción para la regularidad de $\mathcal{M}$ a lo largo de Y (ver def. 18) se encuentra en los últimos términos

[24] O. Gabber se descolgó del proyecto a última hora, aunque es posible que su contribución real tuviera al menos el mismo peso que la del resto de los firmantes. Ver a este respecto el primer párrafo de la introducción del [7].

[25] Las nociones de "puro" y "mixto" son las que hacen referencia a los valores propios de los iterados del morfismo de Frobenius. Ver para más detalles [48].

de los triángulos:

$$(DR\,\mathcal{M}[\star Y])|_Y \longrightarrow (R\,j_*j^*\,DR\,\mathcal{M})|_Y \longrightarrow \mathcal{Q} = (R\,\Gamma_Y\,DR\,\mathcal{M}[\star Y])|_Y[+1] \xrightarrow{+1},$$
$$Sol(\mathcal{M})|_Y \longrightarrow Sol(R\,\Gamma_{[Y]}\mathcal{M})|_Y \longrightarrow \mathcal{Q}' = Sol(\mathcal{M}[\star Y])|_Y[+1] \xrightarrow{+1},$$
$$Sol(\mathcal{M})|_Y \longrightarrow R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}})|_Y \longrightarrow \mathcal{Q}'' = R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}/\mathcal{O}_X)|_Y \xrightarrow{+1}.$$

Por el teorema de dualidad local 17 y la bidualidad de los complejos constructibles, se tiene un isomorfismo $\mathcal{Q}^\vee \simeq \mathcal{Q}'$.

Los dos últimos triángulos están relacionados a través del isomorfismo $\mathcal{Q}' \simeq \mathcal{Q}''$, proveniente de $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \simeq R\,Hom_{\mathcal{O}_X}(R\,\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ ([125, chap. II, prop. 6.1], [134]).

El teorema siguiente es el resultado fundamental de [136].

Teorema 22 *En las condiciones anteriores, los complejos $\mathcal{Q}'$ y $\mathcal{Q}''$ son haces perversos.*

El teorema anterior motiva la definición siguiente:

Definición 23 *El* complejo de irregularidad *de $\mathcal{M}$ a lo largo de la hipersuperficie Y, notado $\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M})$, está definido por: $\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}) = (R\,\Gamma_Y\,DR\,\mathcal{M}[\star Y])|_Y[+1]$ y por tanto se encuentra en el triángulo:*

$$(DR\,\mathcal{M}[\star Y])|_Y \longrightarrow (R\,j_*j^*\,DR\,\mathcal{M})|_Y \longrightarrow \mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}) \xrightarrow{+1}.$$

El teorema 22 y la teoría general de las t-estructuras desarrollada en [7] han permitido a Mebkhout [135] dar una prueba del teorema de comparación de Grothendieck (15) y del problema de Riemann-Hilbert 19, pasando por el teorema de existencia de Riemann en el sentido de [44], sin usar la resolución general de singularidades. En el primer caso tan sólo es necesario apelar al caso elemental de las curvas planas, y en el segundo a la resolución de las superficies de Jung.

En el mismo orden de ideas, en [135] también se da una prueba del teorema de Kashiwara sobre la racionalidad de los ceros del polinomio de Bernstein-Sato (ver 2.5.2) basada en el teorema de la monodromía de singularidades de hipersuperficies complejas arbitrarias[26] y en la teoría de la *V-filtración* (ver la sección 6.5).

5 $\mathcal{D}^\infty$-módulos

5.1 El haz de los operadores diferenciales de orden infinito

Dada una variedad analítica compleja X, la convergencia uniforme sobre los compactos dota al haz de las funciones holomorfas $\mathcal{O}_X$ de una estructura natural FNS

[26] Aunque las primeras pruebas de este teorema también usaban la resolución de singularidades (cf. [94]), en [100] se da una prueba que la evita.

(*Fréchet nuclear Schwartz*). Las desigualdades de Cauchy muestran que los operadores diferenciales lineales son endomorfismos continuos respecto de dicha estructura. Se tiene pues $\mathcal{D}_X \subset Homtop_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

La prueba de la siguiente proposición puede encontrarse en [134] o [143].

Proposición 24 *Sea $(U; \underline{x})$ una carta local de X y sea $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ un endomorfismo continuo. Entonces existen unas funciones holomorfas únicas $a_\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tales que $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\alpha!}$ con $\lim_{|\alpha|\to\infty} |a_\alpha(x)|^{\frac{1}{|\alpha|}} = 0$ uniformemente sobre cada compacto de U, o de manera equivalente, la función $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha(\underline{x})\underline{\xi}^\alpha$ es holomorfa en $U \times \mathbb{C}^n$.*

La definición original del haz de los operadores diferenciales (lineales) de orden infinito $\mathcal{D}_X^\infty$ se encuentra en [170]. No obstante, la escritura local probada en loc. cit. y la proposición anterior nos permiten adoptar la siguiente definición.

Definición 25 *El haz de los operadores diferenciales (lineales) de orden infinito $\mathcal{D}_X^\infty$ sobre X es el haz de los endomorfismos continuos del haz estructural: $\mathcal{D}_X^\infty = Homtop_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

Pocas propiedades de finitud son conocidas para $\mathcal{D}_X^\infty$. No obstante, hay una propiedad algebraica fundamental con importantes consecuencias para la teoría:

Teorema 26 *[170] La extensión $\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_X^\infty$ es* fielmente plana *a la izquierda y a la derecha.*

La prueba original del teorema anterior en [170] utiliza métodos microlocales. En [143] se encuentra una prueba de dicho resultado basada en la existencia de una estructura topológica FNS sobre $\mathcal{D}_X^\infty$, que lo hace aparecer como el completado de $\mathcal{D}_X$, y para la que la división de gérmenes de operadores diferenciales de orden finito [21], [34], [35] es continua (ver también [75]).

5.2 El teorema de bidualidad local de Mebkhout

Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo (a la izquierda) arbitrario, disponemos de un morfismo canónico de "bidualidad"

$$\mathcal{M} \to R\,Hom_{\mathbb{C}_X}(R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X). \tag{16}$$

Notemos $\mathcal{M}^\infty = \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$. Puesto que $\mathcal{D}_X^\infty$ es plano sobre $\mathcal{D}_X$ y que $\mathcal{O}_X$ es también un $\mathcal{D}_X^\infty$-módulo, se tiene que $R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = R\,Hom_{\mathcal{D}_X^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X)$, y por tanto deducimos otro morfismo de "bidualidad"

$$\mathcal{M}^\infty \to R\,Hom_{\mathbb{C}_X}(R\,Hom_{\mathcal{D}_X^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) = R\,Hom_{\mathbb{C}_X}(R\,Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X). \tag{17}$$

Es claro por tanto que, excepto en casos triviales como $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, el morfismo (16) no es un isomorfismo. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado fundamental [125], [129]:

Teorema 27 *En las condiciones anteriores, si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{D}_X$-módulo holónomo, entonces el morfismo de bidualidad (17) $\mathcal{M}^\infty \to R\,\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ es un isomorfismo.*

El teorema anterior permite dar otra propiedad equivalente a la regularidad de la definición 18 en términos de los operadores diferenciales de orden infinito [129], [134, II,2.3.1]:

Teorema 28 *Dado un complejo de $\mathcal{D}_X$-módulos con cohomología holónoma $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y un subespacio analítico cerrado $Y \subset X$, las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *El complejo $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es regular a lo largo de Y.*
2. *El morfismo natural $\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} R\,\boldsymbol{\mathcal{M}}[\star Y] \to R\,j_* j^* \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \boldsymbol{\mathcal{M}}$ es un isomorfismo.*

La virtud de la propiedad 2. del teorema anterior radica en el hecho que no hace intervenir ni el funtor *Sol* ni el funtor *DR*, y que por tanto es independiente de la “resolución” de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

En [143, §5] se utiliza la estructura topológica del haz $\mathcal{D}_X^\infty$ para probar que la existencia de una ecuación funcional del tipo (12) para un generador (local) m de un $\mathcal{D}_X$-módulo $\mathcal{M}$:

$$b(s)F^s m = Q(s)F^{s+1}m,$$

donde $F = 0$ es la ecuación (local) de una hipersuperficie $Y \subset X$, verificando la condición de que el grado total (en s y en las derivaciones) de $Q(s)$ es menor o igual que el grado del polinomio $b(s)$, implica la propiedad 2. del teorema anterior, y por tanto la regularidad de $\mathcal{M}$ a lo largo de Y.

El siguiente resultado resume los resultados de Mebkhout acerca del problema de Riemann-Hilbert [125, chap. V], [132], [131]. Notaremos por $\mathrm{D}_h^b(\mathcal{D}_X^\infty)$ la subcategoría de la categoría derivada $\mathrm{D}^b(\mathcal{D}_X^\infty)$ formada por los complejos de $\mathcal{D}_X^\infty$-módulos “holónomos”.

Teorema 29 *Los funtores:*

$$\begin{gathered}
Sol = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(-, \mathcal{O}_X) : \mathrm{D}_{hr}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}_{cons}^b(\mathbb{C}_X),\\
\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} - : \mathrm{D}_{hr}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}_h^b(\mathcal{D}_X^\infty),\\
Sol^\infty = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^\infty}(-, \mathcal{O}_X) : \mathrm{D}_h^b(\mathcal{D}_X^\infty) \to \mathrm{D}_{cons}^b(\mathbb{C}_X),\\
R\,\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(-, \mathcal{O}_X) : \mathrm{D}_{cons}^b(\mathbb{C}_X) \to \mathrm{D}_h^b(\mathcal{D}_X^\infty)
\end{gathered}$$

son (anti)equivalencias de categorías trianguladas. Además, los tres primeros forman un diagrama conmutativo y los dos últimos son casi inversos el uno del otro.

6 Otros desarrollos de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos

En esta última sección comentamos muy brevemente algunas aplicaciones de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos y algunas de sus líneas más activas en la actualidad, indicando algunas referencias que ayuden al lector interesado.

6.1 La teoría microlocal

El propio origen de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos se encuentra en la conjunción de la teoría clásica de los SELDP, los métodos microlocales (operadores pseudodiferenciales) y los métodos cohomológicos (categorías y funtores derivados, hiperfunciones, microfunciones, etc.), realizada por Sato y su escuela. La referencia base es sin duda [170]. (Ver también [88], [85], [96]).

Esta teoría ha dado lugar a desarrollos puramente algebraicos, como [56] y [95], creándose así la *microlocalización algebraica* (ver [103] para una presentación de conjunto). También ha tenido aplicaciones al estudio de la irregularidad [97], [98]. Por último ha tenido una fuerte interacción con la teoría de Singularidades a través de los sistemas de Gauss-Manin [157], del formalismo de los ciclos evanescentes y las variedades polares [102], de la geometría de los espacios conormales, o *Geometría microlocal*, [176], [164, 165], [27] y de la teoría de haces [91].

6.2 La teoría de $\mathcal{D}$-módulos y las representaciones de grupos

Otra de las consecuencias de más impacto del Problema de Riemann-Hilbert para los módulos holónomos fue la resolución de la conjetura de Kazdhan-Lusztig [6], [29]. La idea básica de Beilinson-Bernstein en [6] es la de relacionar el álgebra envolvente del álgebra de Lie de un grupo algebraico reductivo complejo con los operadores diferenciales globales sobre la variedad de banderas. El lector interesado puede encontrar una introducción accesible en [8] y un tratamiento más completo en [173], [146] (ver también [175]).

6.3 Estudio de la irregularidad de los sistemas diferenciales

Tras la resolución del Problema de Riemann-Hilbert para los módulos holónomos, uno de los campos más inexplorados era el estudio y clasificación de los SELDP con singularidades irregulares. La semicontinuidad de la irregularidad fue estudiada en [133]. La clasificación local de los $\mathcal{D}$-módulos irregulares en una variable, junto con el comportamiento de la transformación de Fourier algebraica y el estudio del fenómeno de Stokes se aborda en [119] (ver también [166] para un estudio parcial del caso de la dimensión 2). La noción de polígono de Newton (pendientes) de un $\mathcal{D}$-módulo se estudia en [97], [137], y en [99] se prueba que las pendientes algebraicas coinciden con las trascendentes definidas a partir de la filtración Gevrey del complejo de irregularidad Irr_Y (def. 23)[27].

6.4 Cálculos efectivos en teoría de $\mathcal{D}$-módulos

La teoría de $\mathcal{D}$-módulos también se ha visto influida por la presencia creciente de los métodos efectivos y computacionales del Álgebra y de la Geometría Algebraica. Así se ha generalizado la teoría de las bases de Gröbner al caso de los anillos de operadores diferenciales [21], [34, 35, 36]. Más recientemente, las técnicas de división se han aplicado al cálculo efectivo de las pendientes del polígono de Newton [2] (ver también, como complemento, [38], [3]). Asimismo, el libro [169] contiene nuevos desarrollos de las aplicaciones del cálculo efectivo con los anillos de operadores diferenciales.

6.5 La teoría de $\mathcal{D}$-módulos y las Singularidades

La interacción de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos y las Singularidades se centra principalmente en los siguientes aspectos: la conexión de Gauss-Manin [92], [157], la relación con el polinomio de Bernstein (ver 2.5.2) y la V-filtración.

En [23] se da una presentación bastante completa acerca de la relación entre las singularidades y el comportamiento del polinomio de Bernstein-Sato (ver también [24]).

La teoría de la V-filtración [118], [86] (ver también [144]) se ocupa de construir en términos de $\mathcal{D}$-módulos holónomos (regulares) los haces perversos de *ciclos evanescentes* [49] (ver también [144]). Esto permite calcular algebraica y efectivamente importantes invariantes geométricos y topológicos de las singularidades.

En [30, 31], [32] se estudian ciertos $\mathcal{D}$-módulos *logarítmicos* asociados a un tipo de singularidades complejas no aisladas, llamadas *divisores libres*. Estos $\mathcal{D}$-módulos están estrechamente relacionados con el polinomio de Bernstein-Sato y codifican gran parte de la información geométrica.

En relación con los cálculos efectivos, en [22], [109] y [156] se dan algoritmos de cálculo del polinomio de Bernstein-Sato.

6.6 La teoría de $\mathcal{D}$-módulos y la teoría de Hodge

El problema de Riemann-Hilbert permite considerar a los módulos holónomos regulares como los "buenos" coeficientes para la cohomología de de Rham de las variedades algebraicas o analíticas complejas lisas. La existencia de la estructura adicional de Hodge [45, 46, 47] sobre la cohomología de de Rham con coeficientes constantes, sugiere la traducción de dicha estructura sobre los módulos holónomos. Este punto de vista ha sido desarrollado por M. Saito en los trabajos [167, 168]. Una presentación de conjunto y actualizada se encuentra en [15].

[27] Esta filtración es una generalización a la dimensión superior de la estudiada en [160].

6.7 La teoría p-ádica de $\mathcal{D}$-módulos

La teoría de $\mathcal{D}$-módulos en general y la correspondencia de Riemann-Hilbert en particular han tenido una influencia decisiva en el desarrollo de la cohomología p-ádica, iniciada en los trabajos de Dwork [51, 52, 53] y de Monsky-Washnitzer [148] (ver también [68]).

Se han dado las definiciones de los "buenos" anillos de operadores diferenciales p-ádicos, esta vez de orden infinito [12, 13], [141, 140] y se han probado algunas de las esperadas propiedades de conservación de finitud sobre sus módulos [13], aunque queda por determinar la conservación de la holonomía por las imágenes directas.

A pesar de lo anterior, la teoría ha obtenido un notable éxito al proporcionar pruebas de la finitud de la cohomología de Monsky-Washnitzer (y de la cohomología rígida [11]) de las variedades algebraicas en característica positiva [14],[39, 40, 41], [138].

Referencias

[1] M. Artin, A. Grothendieck, and J. L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, volume 269, 270, 305 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[2] A. Assi, F. Castro-Jiménez, and J.M. Granger. How to calculate the slopes of a $\mathcal{D}$-module. *Comp. Math.*, 104:107–123, 1996.

[3] A. Assi, F. J. Castro-Jiménez, and M. Granger. The Gröbner fan of an A_n-module. *J. Pure Appl. Algebra*, 150(1):27–39, 2000.

[4] M.F. Atiyah. Resolution of singularities and division of distributions. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 23:145–150, 1970.

[5] C. Bănică and O. Stănăşilă. *Algebraic methods in the global theory of complex spaces.* John Wiley, New York, 1976.

[6] A.A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292:15–18, 1981.

[7] A.A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Faisceaux pervers*, volume 100 of *Astérisque.* S.M.F., Paris, 1983.

[8] Y. Benoist. $\mathcal{D}$-modules sur la variété des drapeaux. In [110], vol. II, pages 99–116.

[9] I.N. Bernstein and S.I. Gel'fand. Meromorphy of the function $\mathcal{P}$. *Funz. Anal.*, 3:84–86, 1969.

[10] J. Bernstein. The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Funz. Anal. Appl.*, 6:26–40, 1972.

[11] P. Berthelot. Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p. *Bull. Soc. Math. de France*, Mémoire 23:7–32, 1986.

[12] P. Berthelot. Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules. Lect. Notes in Math., 163, pages 80–124. Springer-Verlag, 1990, Berlin-Heidelberg.

[13] P. Berthelot. $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(2):185–272, 1996.

[14] P. Berthelot. Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide. *Invent. Math.*, 128(2):329–377, 1997. With an appendix in English by A. J. de Jong.

[15] José Bertin, Jean-Pierre Demailly, Luc Illusie, and Chris Peters. *Introduction à la théorie de Hodge.* Société Mathématique de France, Paris, 1996.

[16] J.E. Björk. Dimension over algebras of differential operators. Preprint (1974).

[17] J.E. Björk. *Rings of Differential Operators.* North Holland, Amsterdam, 1979.

[18] J.E. Björk. *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications.* Kluwer, Amsterdam, 1994.

[19] A. Borel *et al.* *Algebraic $\mathcal{D}$-modules*, volume 2 of *Perspectives in Math.* Academic Press, Boston, 1987.

[20] T. Braden and M. Grinberg. Perverse sheaves on rank stratifications. *Duke Math. J.*, 96(2):317–362, 1999.

[21] J. Briançon and Ph. Maisonobe. Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable. *Enseign. Math.*, 30:7–38, 1984.

[22] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe, and M. Miniconi. Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein: cas non dégénéré. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(3):553–610, 1989.

[23] J. Briançon and Ph. Maisonobe. Caractérisation géométrique de l'existence du polynôme de Bernstein relatif. *Progr. Math.*, vol. 134, pages 215–236. Birkhäuser, Basel, 1996.

[24] J. Briançon, Ph. Maisonobe, and M. Merle. Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et condition de Thom. *Invent. Math.*, 117(3):531–550, 1994.

[25] E. Brieskorn. Die monodromie der isolerten singularitäten von hyperflächen. *Manuscripta Math.*, 2:103–161, 1970.

[26] J.L. Brylinski. Contribution à la théorie des groupes. Univ. Orsay, Juin 1981. (Thèse d'Etat).

[27] J.L. Brylinski. Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques. *Astérisque*, 140–141:3–134, 1986.

[28] J.L. Brylinski, A.S. Dubson, and M. Kashiwara. Formule de l'indice pour modules holonomes et obstruction d'Euler locale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 293(12):573–576, 1981.

[29] J.L. Brylinski and M. Kashiwara. Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. *Invent. Math.*, 64:387–410, 1981.

[30] F.J. Calderón Moreno. Operadores diferenciales logarítmicos con respecto a un divisor libre. Univ. Sevilla, June 1997. Ph.D.

[31] F.J. Calderón-Moreno. Logarithmic differential operators and logarithmic de Rham complexes relative to a free divisor. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 32(5):701–714, 1999.

[32] F.J. Calderón Moreno and L. Narváez Macarro. The module $\mathcal{D}f^s$ for locally quasi-homogeneous free divisor. Prepub. Dep. Algebra, 4, May, 2000. (`http://www.us.es/da/usuarios/narvaez.html`)

[33] H. Cartan and J.P. Serre. Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 237:128–130, 1953.

[34] F. Castro. *Théorème de division pour les opérateurs différentiels et calcul des multiplicités.* PhD thesis, Univ. Paris VII, October 1984.

[35] F. Castro. Calcul de la dimension et des multiplicités d'un D-module monogène. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 302:487–490, 1986.

[36] F. Castro-Jiménez. Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels. *Travaux en cours*, vol. 24, pages 1–20. Paris, 1987. Hermann.

[37] F. Castro-Jiménez. Exercices sur le complexe de De Rham el l'image directe des $\mathcal{D}$-modules. In [110], vol. II, pages 15–45.

[38] F.J. Castro-Jiménez and L. Narváez-Macarro. Homogeneising differential operators, June 1997. Preprint Fac. Matemáticas, 36, Univ. of Sevilla. (`http://www.us.es/da/usuarios/narvaez.html`)

[39] G. Christol and Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43(5):1545–1574, 1993.

[40] G. Christol and Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II. *Annals of Math.*, 146:345–410, 1997.

[41] G. Christol and Z. Mebkhout. Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. III. *Ann. of Math. (2)*, 151(2):385–457, 2000.

[42] S.C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules*, volume 33 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[43] P. Deligne. Lettre à R. MacPherson. 1981.

[44] P. Deligne. *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, volume 163 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970.

[45] P. Deligne. Théorie de Hodge. I. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, pages 425–430, Paris, 1971. Gauthier-Villars.

[46] P. Deligne. Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 40:5–57, 1971.

[47] P. Deligne. Théorie de Hodge. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 44:5–77, 1974.

[48] P. Deligne. La conjecture de Weil, II. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 52:137–252, 1980.

[49] P. Deligne and N. Katz. *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7 II)*, volume 340 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1973.

[50] A.S. Dubson. Formule pour l'indice des complexes constructibles et des Modules holonomes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 298(6):113–116, 1984.

[51] B. Dwork. On the zeta function of a hypersurface: II. *Ann. of Math.*, 80:227–299, 1964.

[52] B. Dwork. On the zeta function of a hypersurface: III. *Ann. of Math.*, 83:457–519, 1966.

[53] B. Dwork. On the zeta function of a hypersurface: IV. A deformation theory for singular hypersurfaces. *Ann. of Math.*, 90:335–352, 1969.

[54] F. Ehlers. The Weyl algebra. In [19], pages 173–205.

[55] L. Ehrenpreis. Solutions of some problems of division, I. *Am. J. Math.*, 76:883–903, 1954.

[56] O. Gabber. The integrability of the characteristic variety. *Amer. J. Math.*, 75:445–468, 1981.

[57] A. Galligo, M. Granger, and Ph. Maisonobe. $\mathcal{D}$-Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal. *Ann. Inst. Fourier*, 35:1–48, 1985.

[58] S. Gel'fand, R. MacPherson, and K. Vilonen. Perverse sheaves and quivers. *Duke Math. J.*, 83(3):621–643, 1996.

[59] S. I. Gel'fand and S. M. Khoroshkin. Algebraic description of certain categories of D_X-Modules. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(3):56–57, 1985.

[60] R. Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des faisceaux*, volume XIII of *Publ. de l'Inst. de Math. de l'Univ. de Strasbourg.* Hermann, Paris, 1958.

[61] M. Goresky and R. MacPherson. La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 284:1549–1551, 1977.

[62] M. Goresky and R. MacPherson. Intersection homology theory. *Topology*, 19:135–162, 1980.

[63] M. Goresky and R. MacPherson. Intersection homology, II. *M. Goresky and R. MacPherson*, 72:77–129, 1983.

[64] J.M. Granger and Ph. Maisonobe. A basic course on differential modules. In [110], vol. I, pages 103–168.

[65] M. Granger and Ph. Maisonobe. Faisceaux pervers relativement à un point de rebroussement. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(12):567–570, 1984.

[66] H. Grauert and R. Remmert. *Theory of Stein spaces*, volume 236 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, New York, 1979.

[67] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 29:95–105, 1966.

[68] A. Grothendieck. *Crystals and the De Rham cohomology of schemes*, pages 306–358. North Holland, Amsterdam, 1968. (notes by I. Coates and O. Jussila).

[69] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique IV (Quatrième Partie)*, volume 32 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1967.

[70] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique I*, volume 166 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.

[71] F. Gudiel Rodríguez. Descripción explícita de t-estructuras sobre espacios estratificados. Univ. Sevilla, February 2001. Ph.D.

[72] R.C. Gunning and H. Rossi. *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[73] R. Hartshorne. *Residues and Duality*, volume 20 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.

[74] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer Verlag, New York, 1977.

[75] H. Hauser and L. Narváez-Macarro. Continuous division of differential operators, November 1997. Preprint.

[76] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I,II. *Ann. of Math.*, 79:109–203, 205–326, 1964.

[77] L. Hörmander. On the division of distribution by polynomials. *Arkiv för Math.*, 3:555–568, 1958.

[78] L. Illusie (Ed.). *Cohomologie l-adique et fonctions L (SGA 5).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[79] O. Ince. *Ordinary Differential Equations.* Dover, New York, 1950.

[80] M. Kashiwara. Algebraic study of systems of linear differential equations. Master's thesis, Univ. de Kyoto, 1971. (in Japanese). Traducción inglesa en: Mém. Soc. Math. France (N.S.), 63, 1995.

[81] M. Kashiwara. Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations. *Proc. Japan Acad.*, 49:803–804, 1973.

[82] M. Kashiwara. On the maximally overdetermined systems of differential equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 10:563–579, 1975.

[83] M. Kashiwara. b-functions and holonomic systems. *Invent. Math.*, 38:33–53, 1976.

[84] M. Kashiwara. On the holonomic systems of linear differential equations II. *Invent. Math.*, 49:121–135, 1978.

[85] M. Kashiwara. *Systems of microdifferential equations*, volume 34 of *Progress in Math.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983.

[86] M. Kashiwara. Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations. *Lect. Notes in Math.*, vol. 1012, pages 134–142. Springer, Berlin, 1983.

[87] M. Kashiwara. The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 20:319–365, 1984.

[88] M. Kashiwara and T. Kawai. Second microlocalisation and asymptotic expansions. In *Proc. Les Houches*, pages 21–76. Lect. Notes in Phys., 126, Springer-Verlag, 1980, Berlin-Heidelberg, 1979.

[89] M. Kashiwara and T. Kawai. On the holonomic systems of microdifferential equations III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 17:813–979, 1981.

[90] M. Kashiwara and T. Ōshima. Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. *Ann. Math. (2)*, 106(1):145–200, 1977.

[91] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.

[92] N.M. Katz. Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turritin. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 39:175–232, 1970.

[93] H. Komatsu. On the index of ordinary differential operators. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 18:379–398, 1971.

[94] A. Landman. On the Picard-Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:89–126, 1973.

[95] G. Laumon. Transformations canoniques et spécialisation pour les -modules filtrés. *Astérisque*, 130:56–129, 1985. Differential systems and singularities (Luminy, 1983).

[96] Y. Laurent. *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, Mass., 1985.

[97] Y. Laurent. Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 20:391–441, 1987.

[98] Y. Laurent. Positivité de l'irrégularité des $\mathcal{D}$-modules. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1993–1994*, pages Exp. No. XXIV, 13. École Polytech., Palaiseau, 1994.

[99] Y. Laurent and Z. Mebkhout. Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathcal{D}$-module. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 32(1):39–69, 1999.

[100] Lê Dũng Tráng. The geometry of the monodromy theorem. In *C.P. Ramanujan: a tribute*, pages 157–173. Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1978.

[101] Lê Dũng Tráng and Z. Mebkhout. Introduction to linear differential systems. In *Proc. Symp. Pure Math.*, volume 40, Part 2, pages 31–63. A.M.S., 1983.

[102] Lê Dũng Tráng and Z. Mebkhout. Variétés caractéristiques et variétés polaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 296:129–132, 1983.

[103] H. Li and F. van Oystaeyen. *Zariskian filtrations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[104] S. Lojasiewicz. Sur le problème de division. *Studia Math.*, 18:87–136, 1959.

[105] R. MacPherson and K. Vilonen. Elementary construction of perverse sheaves. *Invent. Math.*, 84:403–436, 1986.

[106] R. MacPherson and K. Vilonen. Perverse sheaves with singularities along the curve $y^n = x^m$. *Comment. Math. Helv.*, 63(1):89–102, 1988.

[107] Ph. Maisonobe. Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane. *Comp. Math.*, 62:215–261, 1987.

[108] Ph. Maisonobe. Faisceaux pervers sur $\mathbb{C}$ relativement à $\{0\}$ et couple $E \rightleftarrows F$. Travaux en cours, vol. 34, pages 135–146. Hermann, Paris, 1988.

[109] Ph. Maisonobe. $\mathcal{D}$-modules: an overview towards effectivity. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 193, pages 21–55. Cambridge Univ. Press, 1994.

[110] Ph. Maisonobe and C. Sabbah (editors). *Eléments de la théorie des systèmes différentiels (vol. I, II)*, volume 45, 46 of *Travaux en cours*. Hermann, Paris, 1993. Summer school at CIMPA, Nice, 1990.

[111] Ph. Maisonobe and L. Narváez Macarro (editors). International School on Differential Systems. CIMPA Summer school, Sevilla, 1996 (to appear).

[112] B. Malgrange. Existence et approximations des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier*, 6:271–355, 1955.

[113] B. Malgrange. Systèmes différentiels à coefficients constants. In *Séminaire Bourbaki 15e année, (exp. 246)*. Fac. de Scienc. de Paris, Sec. Mathématique, Paris, 1963.

[114] B. Malgrange. Sur les points singuliers des équations différentielles. *L'Enseig. Math.*, XX:147–176, 1974.

[115] B. Malgrange. Sur les polynômes de Bernstein. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 29:81–88, 1974.

[116] B. Malgrange. Le polynôme de I.N. Bernstein d'une singularité isolée. *Lect. Notes in Math.*, 459:98–119, 1976.

[117] B. Malgrange. L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels. *Lect. Notes Math.*, vol. 710, pages 277–289. Springer Verlag, Berlin, 1979.

[118] B. Malgrange. Le polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente. *Astérisque*, 101-102:233–267, 1983.

[119] B. Malgrange. *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, volume 96 of *Progress in Math.* Birkhäuser, Boston, 1991.

[120] B. Malgrange et al. Séminaire "Opérateurs différentiels et pseudodifférentiels", 1975-1976. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1976.

[121] J.C. McConnell and J.C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings.* Pure and applied Mathematics. John Wiley & Sons, Chichester, 1987.

[122] Z. Mebkhout. Cohomologie locale d'une hypersurface. *Lect. Notes in Math.*, 670:89–119, 1977.

[123] Z. Mebkhout. Local cohomology of analytic spaces. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 12:247–256, 1977.

[124] Z. Mebkhout. Théorèmes de dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 287:785–787, 1977.

[125] Z. Mebkhout. Cohomologie locale des espaces analytiques complexes. Univ. Paris VII, Février 1979. (Thèse d'Etat).

[126] Z. Mebkhout. *Dualité de Poincaré*, volume 7 of *Publ. Math.*, pages 139–182. Univ. Paris VII, 1979.

[127] Z. Mebkhout. Sur le problème de Riemann-Hilbert. In *Proc. Les Houches*, pages 90–110. Lect. Notes in Phys., 126, Springer-Verlag, 1980, Berlin-Heidelberg, 1979.

[128] Z. Mebkhout. Sur le problème de Riemann-Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 290:415–417, 1980.

[129] Z. Mebkhout. Théorèmes de bidualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes. *Arkiv för Math.*, 20:111–124, 1982.

[130] Z. Mebkhout. Théorèmes de dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. *Math. Scand.*, 59:25–43, 1982.

[131] Z. Mebkhout. Une autre équivalence de catégories. *Comp. Math.*, 51:63–88, 1984.

[132] Z. Mebkhout. Une équivalence de catégories. *Comp. Math.*, 51:51–62, 1984.

[133] Z. Mebkhout. Sur le théorème de semi-continuité de l'irrégularité des équations différentielles. *Astérisque*, 130:365–419, 1985. Differential systems and singularities (Luminy, 1983).

[134] Z. Mebkhout. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, volume 35 of *Travaux en cours.* Hermann, Paris, 1989.

[135] Z. Mebkhout. Le théorème de comparaison entre cohomologies de De Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 69:47–89, 1989.

[136] Z. Mebkhout. Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathcal{D}_X$-modules. *Progress in Math.*, vol. 88, pages 83–132. Birkhäuser, Boston, 1990.

[137] Z. Mebkhout. Le polygone de Newton d'un $\mathcal{D}_X$-module. In *Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991)*, volume 134 of *Progr. Math.*, pages 237–258. Birkhäuser, Basel, 1996.

[138] Z. Mebkhout. Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. *Amer. J. Math.*, 119:1027–1082, 1997.

[139] Z. Mebkhout and L. Narváez-Macarro. Démonstration géométrique du théorème de constructibilité. In [134], pages 248–253.

[140] Z. Mebkhout and L. Narváez-Macarro. Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques. Lect. Notes in Math., 1454, pages 267–308. Springer-Verlag, 1990, Berlin-Heidelberg.

[141] Z. Mebkhout and L. Narváez-Macarro. La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer. *Ann. Sci. E.N.S.*, 24:227–256, 1991.

[142] Z. Mebkhout and L. Narváez-Macarro. Le théorème de constructibilité de Kashiwara. In [110], vol. II, pages 47–98.

[143] Z. Mebkhout and L. Narváez-Macarro. Le théorème de continuité de la division dans les anneaux d'opérateurs différentiels. *J. reine u. angew. Math.*, 503:193–236, 1998.

[144] Z. Mebkhout and C. Sabbah. $\mathcal{D}_X$-modules et cycles évanescents. In [134], pages 201–239.

[145] M. Merle. On some points of local analytic geometry. In [110], vol. I, pages 81–101.

[146] D. Miličić. Algebraic $\mathcal{D}$-modules and representation theory of semisimple Lie groups. Contemp. Math., 154, pages 133–168. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[147] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*, volume 61 of *Ann. of Math. Studies.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[148] P. Monsky and G. Washnitzer. Formal cohomology I. *Ann. of Math.*, 88:181–217, 1968.

[149] L. Narváez-Macarro. *Faisceaux pervers dont le support singulier est le germe d'une courbe plane irréductible.* PhD thesis, Univ. Paris VII, October 1984.

[150] L. Narváez Macarro. Un calcul de cycles évanescents par rapport aux courbes planes irréductibles. Applications aux faisceaux pervers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(5):197–200, 1985.

[151] L. Narváez-Macarro. Cycles évanescents et faisceaux pervers: cas des courbes planes irréductibles. *Comp. Math.*, 65:321–347, 1988.

[152] L. Narváez-Macarro. Systèmes différentiels linéaires sur une surface de Riemann. Travaux en cours, vol. 34, pages 50–96. Hermann, Paris, 1988.

[153] L. Narváez-Macarro. Cycles évanescents et faisceaux pervers. II. Cas des courbes planes réductibles. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 201, pages 285–323. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[154] L. Narváez Macarro. Anillos de operadores diferenciales de orden finito o infinito. Curso de doctorado, Universidad de Almería, 1998. (`http://www.us.es/da/usuarios/narvaez.html`).

[155] L. Narváez Macarro. The Local Duality Theorem in $\mathcal{D}$-module Theory. In [111], to appear. (Prepub. Fac. Mat. Univ. Sevilla, 55, octubre, 1999. (`http://www.us.es/da/usuarios/narvaez.html`).

[156] T. Oaku. An algorithm of computing b-functions. *Duke Math. J.*, 87(1):115–132, 1997.

[157] F. Pham. *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, volume 2 of *Progress in Math.* Birkhäuser Boston, Mass., 1979.

[158] A. Polishchuk. Perverse sheaves on a triangulated space. *Math. Res. Lett.*, 4(2-3):191–199, 1997.

[159] J.P. Ramis. Géométrie analytique et géométrie algébrique (variations sur le thème "GAGA"). *Lect. Notes in Math.*, 694:228–289, 1978.

[160] J.P. Ramis. Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 48(296):viii+95, 1984.

[161] J.P. Ramis and C. Ruget. Résidus et dualité. *Invent. Math.*, 26:89–131, 1974.

[162] G. de Rham. *Variétés Différentiables*, volume III of *Publ. de l'Inst. de Math. de l'Univ. de Nancago.* Hermann, Paris, 1960.

[163] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press, N.Y., 1979.

[164] C. Sabbah. Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux. *Astérisque*, 130:161–192, 1985. Differential systems and singularities (Luminy, 1983).

[165] C. Sabbah. Classes caractéristiques et théorèmes d'indice: point de vue microlocal. *Astérisque*, 241:Exp. No. 818, 5, 381–409, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.

[166] C. Sabbah. Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2. *Astérisque*, 263:viii+190, 2000.

[167] M. Saito. Modules de Hodge polarisables. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 24:849–995, 1989.

[168] M. Saito. Mixed Hodge modules. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26(2):221–333, 1990.

[169] M. Saito, B. Sturmfels, and N. Takayama. *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[170] M. Sato, T. Kawai, and M. Kashiwara. Microfunctions and pseudo-differential equations. *Lect. Notes in Math.*, 287:265–529, 1973.

[171] J.P. Serre. Un théorème de dualité. *Comm. Math. Helv.*, 29:9–26, 1955.

[172] J.P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, 6:1–42, 1956.

[173] T. A. Springer. Quelques applications de la cohomologie d'intersection. In *Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982*, pages 249–273. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[174] K. Suominen. Duality for coherent sheaves on analytic manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 424:1–19, 1968.

[175] J. Tirao, D.A. Vogan, Jr., and J.A. Wolf, editors. *Geometry and representation theory of real and p-adic groups.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.

[176] J.-L. Verdier. Géométrie microlocale. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, pages 127–133. Springer, Berlin, 1983.

[177] J.L. Verdier. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compactes. In *Séminaire Bourbaki, 18e année, exp. 300.* Fac. de Scienc. de Paris, Sec. Mathématique, Paris, 1966.

[178] J.L. Verdier. Classe d'homologie associée à un cycle. *Astérisque*, 36–37:101–151, 1976.

[179] J.L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, 239:xii+253 pp., 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[180] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge studies in advanced mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[181] J. Wolf. Differentiable fiber spaces and mapping compatible with Riemannian metrics. *Mich. Math. J.*, 11:65–70, 1964.

Luis Narváez Macarro
Departamento de Álgebra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
P.O. Box 1160
41080 Sevilla, Spain

narvaez@algebra.us.es
http://www.us.es/da/usuarios/narvaez.html